

Documento de Trabajo 94-02
Serie de Estadística y Econometría 02
Febrero 1994

Departamento de Estadística y Econometría
Universidad Carlos III de Madrid
Calle Madrid, 126
28903 Getafe (Spain)
Fax (341) 624-9849

MODELOS PARA SERIES TEMPORALES HETEROCEDASTICAS

Esther Ruiz*

Resumen

Muchas series temporales financieras observadas con frecuencias elevadas y algunas series macroeconómicas son condicionalmente heterocedásticas. La modelización de la varianza condicional de dichas series es importante desde un punto de vista teórico para cualquier modelo que tenga en cuenta la incertidumbre. Además, desde un punto de vista econométrico, si se ignora la heterocedasticidad se puede incurrir en pérdidas de eficiencia en la estimación y en la construcción de intervalos de predicción.

En el presente artículo, se revisan los principales modelos univariantes y multivariantes propuestos en la literatura para la modelización de la heterocedasticidad temporal: modelos basados en ARCH y modelos de volatilidad estocástica. Para cada modelo considerado se describen sus principales propiedades estocásticas así como su estimación, validación y predicción. En el caso univariante, los diferentes modelos descritos se ilustran con la modelización del Índice Largo diario de la Bolsa de Madrid.

Palabras Clave

ARCH, Cointegración en la varianza, Heterocedasticidad, Índices bursátiles, Varianza condicional, Volatilidad estocástica

*Departamento de Estadística y Econometría, Universidad Carlos III de Madrid. Artículo preparado para el número especial de Cuadernos Económicos de ICE. Quiero dar las gracias a I. Peña por numerosos comentarios que han ayudado a mejorar la presentación y el contenido de este artículo. También agradezco la ayuda financiera del Programa de Econometría Aplicada de la Cátedra Argentaria de la Universidad Carlos III de Madrid. Como siempre, todos los errores son de mi responsabilidad.

1. Introducción

El análisis de series temporales económicas tradicionalmente se ha centrado en el estudio de modelos para la media condicional en los que se asume que la varianza condicional es constante en el tiempo. Generalmente, este supuesto es una aproximación aceptable cuando se analizan series económicas observadas mensual, trimestral o anualmente. Sin embargo, recientemente se está desarrollando un creciente interés por el estudio de modelos para explicar variaciones temporales de los segundos momentos condicionales. Este interés ha surgido principalmente en relación con el análisis de series temporales financieras observadas muy frecuentemente, por ejemplo, diariamente o incluso minuto a minuto!.

Hasta el momento no se ha desarrollado ninguna teoría económica que proponga un modelo para la formación de las varianzas condicionales. Por ello, los modelos econométricos propuestos para modelizar la evolución de la varianza se basan en tratar de reproducir las propiedades empíricas de las series temporales de interés.

La modelización de la varianza condicional de una serie financiera puede ser interesante desde distintos puntos de vista. Primero, la obtención de estimaciones de la varianza condicional es muy útil desde el punto de vista de construcción de carteras de valores con un cierto nivel de riesgo. Lo mismo puede decirse para modelos de valoración de opciones, así como en modelos sobre la estructura temporal de los tipos de interés. También en Macroeconomía, las varianzas condicionales tienen un papel fundamental en modelos que tengan en cuenta la incertidumbre, como pueden ser, por ejemplo, modelos sobre la inflación; ver Nijman y Palm (1992). Finalmente, desde un punto de vista econométrico, si se ignora la heterocedasticidad, puede haber pérdidas en eficiencia en la estimación así como en la construcción de intervalos de predicción.

El objetivo de este artículo es revisar los principales modelos para la varianza condicional

propuestos en la literatura. En estos momentos existe un número importante de artículos que revisan dicha literatura: Bollerslev *et al.* (1992), Nijman y Palm (1992), Bera y Higgins (1993) y Bollerslev *et al.* (1993). Estos artículos se centran principalmente en el análisis de modelos basados en el modelo ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) originalmente propuesto por Engle (1982). En el presente artículo además se revisan otros modelos alternativos: los modelos de volatilidad estocástica (SV), propuestos por Taylor (1986).

En la sección 2, se revisan algunos conceptos básicos en el análisis de series temporales que pueden ser útiles para la descripción de las propiedades de los modelos considerados. En la sección 3 se describen las principales características empíricas que frecuentemente presentan las series financieras, ilustrando dichas características con ejemplos de series financieras españolas. En la sección 4 se describen varios contrastes de no linealidad que pueden ser utilizados para contrastar la variabilidad en el tiempo de la varianza de una serie temporal. En la sección 5 se describen las propiedades de los principales modelos basados en el modelo ARCH, así como su estimación y predicción. La sección 6 trata de los modelos SV, sus propiedades, estimación y predicción. La sección 7 trata de la generalización de los modelos ARCH y de los modelos SV a series multivariantes. El artículo finaliza en la sección 8 con las conclusiones y sugerencias para futuras investigaciones.

2. Definiciones y Conceptos Básicos

2.1 Estacionariedad en sentido estricto y en sentido amplio

Considérese el proceso estocástico univariante $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$, donde el símbolo t representa tiempo discreto e y_t es una variable aleatoria real. La caracterización del proceso viene dada por su función de distribución conjunta. Si denominamos $F_{y_1, \dots, y_n}(y_{10}, \dots, y_{T0})$ a la función

de distribución conjunta de $\{y_1, \dots, y_T\}$, el proceso es **estacionario en sentido estricto** si

$$F_{y_{t_1}, \dots, y_{t_n}}(Y_{t_1,0}, \dots, Y_{t_n,0}) = F_{y_{t_1+h}, \dots, y_{t_n+h}}(Y_{t_1,0}, \dots, Y_{t_n,0})$$

para todo conjunto de índices t_1, \dots, t_n y para todo h . Si un proceso es estacionario en sentido estricto, la función de distribución marginal de cada variable y_t es la misma para todo t . A los momentos de estas distribuciones marginales se les denomina momentos incondicionales o marginales. Si el proceso es estacionario en sentido estricto y $E\{|y_t|\} < \infty$, entonces el valor esperado de y_t , μ_y , es constante para todo t . Si además $E\{y_t^2\} < \infty$, entonces la varianza de y_t , σ_y^2 , es constante para todo t .

En la mayoría de las aplicaciones es difícil contrastar la hipótesis de estacionariedad en sentido estricto, por lo que habitualmente se utiliza el concepto de **estacionariedad en sentido amplio**. El proceso $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$ es estacionario en sentido amplio si

- i) El valor esperado incondicional de y_t es finito y constante para todo t .
- ii) Para cualquier valor de h , la covarianza entre y_{t+h} e y_t es finita y depende solo de h y, por lo tanto, podemos escribir $\text{Cov}(y_{t+h}, y_t) = \gamma(h)$ y la correspondiente autocorrelación como $\rho(h)$.

Es importante señalar que, dadas las definiciones de los dos conceptos de estacionariedad, ninguno de ellos es siempre más restrictivo que el otro. Es obvio que la definición de estacionariedad en sentido estricto requiere que todas las distribuciones conjuntas de cualquier subconjunto de n variables del proceso deben ser invariantes en el tiempo mientras que la estacionariedad en sentido amplio solo requiere que los dos primeros momentos sean invariantes en el tiempo. Por lo tanto, la estacionariedad en sentido amplio no implica la estacionariedad en sentido estricto. Por otro lado, la estacionariedad en sentido estricto tampoco implica estacionariedad en sentido amplio, dado que esta última exige que los dos primeros momentos marginales sean finitos, condición que no es necesaria para la

estacionariedad en sentido estricto. En este artículo, cuando se hace referencia a procesos estacionarios, se estará utilizando la noción de estacionariedad en sentido amplio.

2.2 Ruido blanco. No autocorrelación e Independencia

Un proceso fundamental en el análisis de series temporales es el proceso de ruido blanco. El ruido blanco es un caso particular de un proceso estacionario, en el que el valor medio y todas las autocovarianzas son cero. En consecuencia, $\{\epsilon_t\}_{t=1}^{\infty}$ es un ruido blanco si

- (i) $E(\epsilon_t) = 0$
- (ii) $\text{Var}(\epsilon_t) = \sigma_{\epsilon}^2$
- (iii) $E(\epsilon_t \epsilon_{t-\tau}) = 0$ para $\tau \geq 1$.

Es importante señalar que la condición (iii) significa que el proceso no está autocorrelacionado, es decir, que no existen relaciones **lineales** entre los valores que toma ϵ_t en dos momentos del tiempo diferentes. Sin embargo, la no autocorrelación no debe confundirse con la independencia. Se dice que un proceso $\{a_t\}_{t=1}^{\infty}$ es independiente cuando la distribución conjunta de las variables que componen el proceso se puede obtener como producto de las distribuciones marginales. Intuitivamente, la independencia implica que no existe **ningún tipo de relación** entre el valor que toma a_t en dos momentos del tiempo diferentes.

Es fácil comprobar que independencia implica no autocorrelación dado que si la distribución conjunta se puede obtener como producto de las marginales, en particular, se cumplirá que el valor esperado del producto será igual al producto de los valores esperados y, en consecuencia:

$$\text{Cov}(a_t, a_{t-\tau}) = E(a_t a_{t-\tau}) - \mu_a^2 = E(a_t) E(a_{t-\tau}) - \mu_a^2 = 0.$$

Sin embargo, podemos encontrar procesos que no tengan autocorrelación, pero que no sean

independientes. Esto es debido a que la no autocorrelación implica que no existen relaciones lineales entre las variables que componen el proceso, pero puede haber otro tipo de relaciones (por ejemplo, cuadráticas), con lo que el proceso ya no es independiente. Como ilustración, considerar el siguiente proceso ARCH(1), que será analizado posteriormente

$$y_t = \varepsilon_t (\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2} \quad (1)$$

donde $\varepsilon_t \sim \text{IIDS}(0,1)$, es decir, ε_t es independiente e idénticamente distribuido con media cero y varianza unitaria y sigue una distribución simétrica.

Dado que ε_t no está relacionado con su propio pasado tampoco lo está con el pasado de y_t , y por lo tanto, la esperanza marginal de y_t viene dada por

$$\mu_y = E(\varepsilon_t (\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2}) = E(\varepsilon_t) E(\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2} = 0. \quad (2)$$

De la misma manera,

$$\sigma_y^2 = E(y_t^2) = E(\varepsilon_t^2 (\omega + \alpha y_{t-1}^2)) = \omega + \alpha E(y_{t-1}^2).$$

Si asumimos que y_t es un proceso estacionario, es decir, $\alpha < 1$, entonces

$$\sigma_y^2 = \omega / (1-\alpha). \quad (3)$$

Finalmente, la autocovarianza de orden $\tau \geq 1$ vendrá dada por

$$E(y_t y_{t-\tau}) = E[\varepsilon_t (\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2} y_{t-\tau}] = E(\varepsilon_t) E[(\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2} y_{t-\tau}] = 0 \quad (4)$$

y, por lo tanto, el proceso ARCH(1) no está autocorrelacionado, es decir, no existen relaciones lineales entre los valores que toma la variable y_t en distintos momentos del tiempo.

Sin embargo, la serie y_t^2 está autocorrelacionada. Considerar, por ejemplo, la autocovarianza de orden 1

$$\gamma_2(1) = E\left[\left(y_t^2 - \frac{\omega}{1-\alpha}\right)\left(y_{t-1}^2 - \frac{\omega}{1-\alpha}\right)\right] = \omega E(y_{t-1}^2) + \alpha E(y_{t-1}^4) - \frac{\omega^2}{(1-\alpha)^2}.$$

Asumiendo normalidad de ε_t y si $3\alpha^2 < 1$, entonces

$$E(Y_t^4) = E[\epsilon_t^4 (\omega + \alpha Y_{t-1}^2)^2] = \frac{\omega^2}{(1-\alpha)^2} \frac{3(1-\alpha^2)}{1-3\alpha^2}. \quad (5)$$

Por lo tanto,

$$\gamma_2(1) = \frac{2\omega^2\alpha}{(1-\alpha)^2(1-3\alpha^2)} \neq 0. \quad (6)$$

Es decir, la serie y_t no está autocorrelacionada, pero hay dependencia a través de los cuadrados de la serie.

2.3 Distribuciones marginales y la ley de expectativas iteradas

La base de los modelos de series temporales está en la distinción entre los momentos marginales de las variables que componen el proceso $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$ y los momentos de las distribuciones de cada variable y_t condicional en $\{y_1, \dots, y_{t-1}\}$. Esto es debido a que los supuestos sobre las distribuciones condicionales son, en general, más suaves que los supuestos sobre las distribuciones marginales. En particular, aunque el proceso sea estacionario en sentido amplio, es decir, la media y la varianza marginales sean constantes en el tiempo, los correspondientes momentos condicionales pueden variar. Considerar, por ejemplo, un proceso AR(1) dado por

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (7)$$

donde $\varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Bajo estacionariedad, es decir $|\phi| < 1$, la esperanza y la varianza marginales de y_t son cero y $\sigma_\varepsilon^2/(1-\phi^2)$ respectivamente.

Si consideramos ahora los respectivos momentos condicionales,

$$E_{t-1}(y_t) = \phi y_{t-1}$$

donde E_{t-1} denota la esperanza condicional en el pasado de la serie hasta el momento $t-1$ incluido. La esperanza condicional de y_t evoluciona en el tiempo dado que depende de la

observación en el momento $t-1$.

Con respecto a la varianza condicional,

$$E_{t-1}(y_t - \phi y_{t-1})^2 = \sigma_\varepsilon^2.$$

En un proceso AR(1) la varianza condicional es constante en el tiempo y no depende de las observaciones.

Considerérese ahora el proceso ARCH(1). Como hemos visto anteriormente tanto la media como la varianza marginales son constantes en el tiempo. La media y la varianza condicionales vienen dadas por

$$E_{t-1}(y_t) = (\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2} E_{t-1}(\varepsilon_t) = 0 \quad (8)$$

$$y \quad E_{t-1}(y_t^2) = (\omega + \alpha y_{t-1}^2) E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \omega + \alpha y_{t-1}^2 \quad (9)$$

respectivamente. En un proceso ARCH(1) la media condicional es constante pero la varianza condicional evoluciona en el tiempo.

Un resultado importante para el análisis de series temporales heterocedásticas es la ley de expectativas iteradas. En el contexto del presente artículo, esta ley se puede formular de la siguiente forma: La esperanza de la observación y_t , o de una función de ella, $g(y_t)$ condicional en información disponible en el momento $t-\tau$ puede calcularse tomando primero la esperanza condicional en información disponible en $t-1$, después calculando la esperanza condicional en $t-2$ y así sucesivamente hasta $t-\tau$, es decir,

$$E_{t-\tau}[g(y_t)] = E_{t-\tau}[E_{t-\tau+1} \dots E_{t-1}[g(y_t)]].$$

La esperanza marginal puede obtenerse dejando que τ tienda a infinito.

Como un ejemplo de la utilidad de esta ley, considerar nuevamente la esperanza marginal del proceso ARCH(1) calculada en (2). Aplicando la ley de expectativas iteradas y dado que y_{t-1} es observable en el momento $t-1$, obtenemos

$$E(y_t) = E[E_{t-1}(\varepsilon_t (\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2})] = E[(\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2} E_{t-1}(\varepsilon_t)] = E(0) = 0.$$

2.4 Martingala en diferencias

Otro concepto importante para la caracterización de series temporales es el de martingala en diferencias (MD). Si $E[|y_t|] < \infty$, un proceso MD tiene la propiedad de que su esperanza condicional en información pasada es cero, es decir,

$$E_{t-1}(y_t) = 0.$$

Utilizando la ley de expectativas iteradas es inmediato comprobar que también la esperanza marginal es cero

$$E(y_t) = E[E_{t-1}(y_t)] = 0.$$

Además, es posible demostrar que y_t no está correlacionada con ninguna función de las observaciones pasadas, $f(y_1, y_2, \dots, y_{t-1})$, dado que

$$E[y_t f(y_1, y_2, \dots, y_{t-1})] = E[f(y_1, y_2, \dots, y_{t-1}) E_{t-1}(y_t)] = 0.$$

En consecuencia, es posible demostrar que todo proceso MD siempre es no autocorrelacionado, aunque la implicación en sentido contrario no sea siempre cierta. Además, es fácil demostrar que todo proceso de variables independientes con media cero es siempre MD, aunque nuevamente la implicación contraria no sea siempre cierta.

2.5 Gaussianidad y Linealidad

El proceso $\{y_t\}_{t=1}^{\infty}$ es Gaussiano si la distribución conjunta de $\{y_1, \dots, y_T\}$ es normal multivariante. Dadas las propiedades de la distribución normal multivariante, la Gaussianidad implica que todas las distribuciones marginales así como las condicionales son normales. Sin embargo es importante recordar, especialmente en el caso de las distribuciones condicionales, que el hecho de que estas sean normales no implica que la distribución conjunta sea normal. En consecuencia, la Gaussianidad implica la normalidad condicional pero no viceversa. Como ejemplo, considerar nuevamente el proceso ARCH(1), dado por

$$y_t = \varepsilon_t (\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2}$$

donde $\varepsilon_t \sim \text{NID}(0,1)$, es decir, ε_t es un ruido blanco normal independientemente distribuido. La distribución de y_t condicional en $\{y_1, \dots, y_{t-1}\}$ es normal debido a que al condicionar $(\omega + \alpha y_{t-1}^2)^{1/2}$ es observable, es decir, no estocástico y, por lo tanto, la distribución de y_t coincide con la de ε_t . Sin embargo, la distribución marginal de y_t no es normal y, en consecuencia, tampoco la conjunta de $\{y_1, \dots, y_T\}$ es normal. Conviene señalar, que bajo Gaussianidad los conceptos de independencia y no autocorrelación son equivalentes. Sin embargo, bajo normalidad condicional no autocorrelación no implica, en general, independencia.

Otra relación importante es que la normalidad condicional implica que la esperanza condicional de y_t es una función lineal de $\{y_1, \dots, y_{t-1}\}$. Una vez más la implicación en sentido contrario no se cumple. Considérese, por ejemplo, el siguiente proceso

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + a_t, \quad (10.a)$$

$$a_t = \varepsilon_t \exp\{0.5 h_t\}, \quad (10.b)$$

$$h_t = \phi_2 h_{t-1} + \eta_t \quad (10.c)$$

donde $\varepsilon_t \sim \text{NID}(0,1)$, $\eta_t \sim \text{NID}(0, \sigma_\eta^2)$ y ambas perturbaciones son mutuamente independientes.

Dado que ε_t es independiente de cualquier perturbación en el pasado y de η_t , la esperanza condicional de y_t viene dada por

$$E_{t-1}(y_t) = E_{t-1}[\phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \exp\{0.5 (\phi_2 h_{t-1} + \eta_t)\}] = \phi_1 y_{t-1}$$

y, por lo tanto, la esperanza condicional es una función lineal de observaciones pasadas. Sin embargo y_t no es condicionalmente normal, dado que a_t es una función no lineal de dos variables aleatorias normales, ε_t y η_t y ninguna de ellas es observable en el momento $t-1$.

3. Regularidades Empíricas de las series Temporales Financieras

Muchas de las series temporales financieras observadas con frecuencias elevadas, tienen propiedades empíricas comunes. Fundamentalmente estas propiedades son:

1) Nula o escasa estructura regular dinámica en la media. Habitualmente, si estas series tienen algún tipo de estructura dinámica en los niveles, esta suele estar suficientemente representada por un modelo AR(1) ó MA(1) con parámetros pequeños. Considérese, por ejemplo, la serie de rendimientos diarios del Índice largo de la Bolsa de Madrid desde el 1 de marzo de 1990 hasta el 2 de Octubre de 1992 (567 observaciones). A la serie, que ha sido intervenida por el "efecto Gorbachev"¹, se le ha ajustado un modelo MA(1) con parámetro 0,1219. Los residuos de dicho ajuste aparecen representados en la figura 1. A partir de este momento cuando se mencione la serie de rendimientos del índice, se estará haciendo referencia a dicha serie de residuos cuyos principales momentos muestrales aparecen en el cuadro 1, donde se puede observar que el estadístico Box-Ljung para los 10 primeros retardos, $Q(10)$, no es significativo. Otro ejemplo, es la serie diaria de incrementos porcentuales del tipo de cambio Peseta/Dólar desde 19 de Junio de 1989 hasta 31 de Diciembre de 1991 (662 observaciones). La serie aparece representada en la figura 2. En el cuadro 1 es posible observar que el estadístico $Q(10)=13,85$, no es significativo y, por lo tanto, la serie no tiene estructura dinámica en los niveles.

2) Distribuciones leptocúrticas. Este fenómeno ha sido ampliamente documentado en la literatura. Algunas de las primeras referencias sobre el exceso de curtosis en las series de rendimientos financieros son Mandelbrot (1963) y Fama (1965).

Por ejemplo, en el cuadro 1, puede observarse que la curtosis de la serie de rendimientos

¹ Las observaciones correspondientes a los días 19 a 22 de Agosto de 1991 han sido igualadas a la media muestral.

diarios es 7,3253, y por lo tanto, la distribución empírica de esta serie tiene colas más anchas que las de la distribución Normal. Para el tipo de cambio Peseta/Dolar, la curtosis es 4,5135, también significativamente mayor que 3.

3) Habitualmente las series financieras suelen tener distribuciones simétricas, aunque no es infrecuente encontrar series con coeficientes de asimetría significativamente distintos de cero; por ejemplo, la serie del tipo de cambio Peseta/Dolar.

4) Agrupamiento de la volatilidad. Mandelbrot (1963) y Fama (1965) ya señalaron que las series temporales financieras presentan la característica de que cambios en los precios de gran magnitud son seguidos por cambios grandes de cualquier signo, mientras que los cambios pequeños tienden a ser seguidos por cambios pequeños. Este fenómeno puede observarse en las figuras 1 y 2.

Este agrupamiento de la volatilidad se refleja en que las autocorrelaciones de la serie al cuadrado, y_t^2 , son significativamente distintas de cero. Por ejemplo, para el rendimiento del índice, el estadístico Box-Ljung para 10 retardos de y_t^2 , $Q_2(10)$ es 109,25, un valor altamente significativo.

5) Efecto "apalancamiento". Cuando las series financieras analizadas son rendimientos de activos financieros, se suele observar una respuesta asimétrica de la volatilidad al nivel de los rendimientos. Habitualmente la volatilidad se incrementa en mayor medida cuando el rendimiento es negativo que cuando es positivo; ver, por ejemplo, Black (1976) y Christie (1982).

6) Efectos estacionales. Cuando se analizan series financieras diarias, normalmente, se observan algunos efectos estacionales en el viernes y lunes debidos a que no existen transacciones comerciales durante el fin de semana; ver, por ejemplo, Baillie y Bollerslev (1989). Además, si se consideran series observadas hora a hora, pueden observarse algunos

efectos estacionales dentro del día, debidos principalmente a los periodos de descanso para las comidas; ver, por ejemplo, Baillie y Bollerslev (1991).

Las principales características compartidas por la gran mayoría de las series financieras son las características (1) a (4). Una vez eliminada cualquier estructura dinámica de la media, un modelo básico capaz de describir dichas características empíricas es:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad (11)$$

donde $\varepsilon_t \sim \text{IIDS}(0,1)$ y σ_t es conocido en la literatura financiera como **volatilidad**.

Existen en la literatura numerosos modelos para σ_t . El objetivo de este artículo es describir algunos de ellos indicando cuales son sus principales características y limitaciones en el análisis empírico.

4. Contrastes de no-linealidad

Para analizar la estructura dinámica de una serie temporal habitualmente se utiliza el correlograma que, cuando la serie es la realización de un proceso lineal, contiene toda la información relevante en el dominio del tiempo. Sin embargo cuando la serie presenta no linealidades, como las provocadas por la presencia de heterocedasticidad, hay otros estadísticos que pueden aportar nueva información sobre su evolución dinámica.

En el dominio del tiempo se puede examinar el correlograma de distintas transformaciones de y_t , como, por ejemplo, el valor absoluto o el cuadrado. Habitualmente, cuando se analizan series financieras se examina el correlograma de y_t^2 , aunque Granger y Ding (1993) indican que puede haber mayor información en el correlograma de $|y_t|^4$. Si $\rho_2(\tau)$ denota la autocorrelación de orden τ de y_t^2 e y_t es un proceso lineal con momentos hasta de orden 4 finitos se puede demostrar que $\rho_2(\tau) = (\rho(\tau))^2$; ver Maravall (1983). En consecuencia, podemos utilizar el correlograma de y_t^2 como un contraste de linealidad, dado que si las

observaciones son independientes entre sí $\rho_2(\tau) = 0, \tau \geq 1$. McLeod y Li (1983) prueban que el estadístico de Box-Ljung de orden P para las autocorrelaciones muestrales de y_t^2 , $Q_2(P)$, se distribuye asintóticamente como una $\chi^2(P)$ para un ruido blanco Gaussiano. El contraste también puede aplicarse a los residuos de un modelo ajustado a la serie, por ejemplo, un modelo ARMA, sin necesidad de modificar los grados de libertad. El estadístico $Q_2(P)$ puede obtenerse como el estadístico de un contraste de multiplicador de Lagrange contra un modelo ARCH(P), que se considerará más adelante.

Existen otros muchos contrastes de no linealidad propuestos en la literatura. Una recopilación de dichos contrastes puede encontrarse en Granger y Terasvista (1992).

5. Modelos ARCH

Los modelos ARCH modelizan σ_t como una función de observaciones pasadas. En esta sección revisaremos algunos de los modelos basados en ARCH más populares en la literatura.

5.1 ARCH(q)

El proceso ARCH(q) viene dado por

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad (12.a)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 \quad (12.b)$$

donde $\varepsilon_t \sim \text{IIDS}(0,1)$, y $\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ son parámetros tales que $\omega > 0, \alpha_i \geq 0, i=1, \dots, q$ y $\sum_{i=1}^q \alpha_i \leq 1$. Las restricciones de no negatividad en los parámetros son necesarias para asegurar la positividad de la varianza y la de que la suma sea estrictamente menor que la unidad es la condición de estacionariedad. Si ε_t es Gaussiano, y_t es condicionalmente normal, y además σ_t^2 coincide con la varianza condicional, es decir,

$$y_t | y_1, \dots, y_{t-1} \sim N(0, \sigma^2);$$

ver sección 2 para una guía de como probar estos resultados.

El proceso ARCH(q) es una MD y, por lo tanto, su media marginal es cero y no tiene autocorrelación; estos resultados han sido probados en la sección 2 para el caso particular del proceso ARCH(1). Si y_t es un proceso estacionario, su varianza marginal viene dada por

$$\sigma_y^2 = \omega / (1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q).$$

Aunque la distribución marginal de y_t no tiene una forma conocida, es fácil probar que todos los momentos impares de y_t son cero y, en consecuencia, la distribución marginal de y_t es simétrica. Además, en el caso del modelo ARCH(1) con distribución condicional normal, si $3\alpha_1^2 < 1$, la curtosis es $3(1-\alpha_1^2)/(1-3\alpha_1^2)$; ver sección 2. Si $\alpha_1 > 0$, la curtosis es mayor que 3 y, por lo tanto, la distribución marginal de y_t tiene colas más anchas que las de la normal, es decir, es una distribución leptocúrtica. Conviene recordar que esta es una de las propiedades empíricas habitualmente observadas en series financieras; ver cuadro 1.

Aunque y_t no tiene autocorrelación, la estructura dinámica de la serie aparece en y_t^2 . Taylor (1986) prueba que la función de autocorrelación (fac) del cuadrado de un proceso ARCH(q) tiene la misma forma que la fac de un proceso AR(q).

Con respecto a la predicción de valores futuros de la serie y_t , es preciso señalar que la presencia de efectos ARCH no afecta a la predicción puntual de y_t sino a los intervalos de predicción. Si denotamos por \hat{y}_{T+l} , la predicción de y_{T+l} realizada con información hasta el momento T, podemos calcular su error cuadrático medio (ECM), que en este caso coincide con la varianza condicional en la información disponible en el momento T, mediante la aplicación de la ley de expectativas iteradas. Por ejemplo, si $\ell=2$

$$\begin{aligned} \text{ECM}(\hat{y}_{T+2}) &= E_T(\hat{y}_{T+2} - y_{T+2})^2 = E_T(y_{T+2})^2 = E_T[E_{T+1}[y_{T+2}^2]] = \\ &= \omega + \alpha_2 y_T + \dots + \alpha_q y_{T+1-q} + \alpha_1 E_T(y_{T+1}^2) = \end{aligned}$$

$$= \omega(1 + \alpha_1) + (\alpha_1^2 + \alpha_2) y_T^2 + (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3) y_{T-1}^2 + \dots + \alpha_1 \alpha_q y_{T+2-q}^2 + \alpha_q y_{T+1-q}^2.$$

Para finalizar la descripción del proceso ARCH(q), es conveniente señalar que algunos autores han analizado la representación del proceso ARCH(q) como un proceso MA(q) con parámetros variables en el tiempo; ver, por ejemplo, Tsay (1987), Bera *et al.* (1992).

5.2 GARCH(p,q)

En la práctica el proceso ARCH(q) necesita un número relativamente elevado de retardos para poder representar adecuadamente la dinámica de los cuadrados de las series financieras. La estimación de un número elevado de parámetros puede presentar dificultades de cálculo en la maximización de la verosimilitud, por lo que Engle (1983) propuso introducir restricciones en los parámetros del tipo $\alpha_i = \alpha(q+1-i)/(q(q+1))$, con lo que solo es necesario estimar dos parámetros: ω y α .

Sin embargo, utilizando la misma idea que en los modelos ARMA (aproximar un polinomio de orden alto mediante el cociente de dos polinomios de orden relativamente más pequeño), Bollerslev (1986) propuso el modelo GARCH(p,q). Este modelo permite mayor flexibilidad en la dinámica de y_t^2 , que la solución adoptada por Engle (1983). Taylor (1986) propuso, al mismo tiempo y de forma independiente de Bollerslev, el modelo GARCH(1,1) que es, en la práctica, el más utilizado en la modelización de series financieras y viene dado por

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad (13.a)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (13.b)$$

donde $\varepsilon_t \sim \text{IIDS}(0,1)$ y ω , α y β son parámetros tales que $\omega > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$ y $\alpha + \beta < 1$. Nuevamente las restricciones de no negatividad de α y β son necesarias para garantizar la positividad de la varianza. La condición $\alpha + \beta < 1$ es necesaria para garantizar que la varianza marginal de y_t sea finita y, por lo tanto, el proceso sea estacionario. Si dicha condición se

satisface y utilizando la ley de expectativas iteradas es posible demostrar que la varianza marginal de y_t viene dada por

$$E(y_t^2) = E(\sigma_t^2) = \omega / (1 - \alpha - \beta). \quad (14)$$

Como en el caso del proceso ARCH(q), la distribución marginal del proceso GARCH(1,1) tiene una forma desconocida, con media cero y varianza dada por (14). Sin embargo, es fácil demostrar que todos los momentos impares son cero y, por lo tanto, la distribución es simétrica. Además dicha distribución es leptocúrtica. Si $3\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 < 1$ y la distribución de ε_t es normal

$$\kappa_y = 3 + 6 \alpha^2 / (1 - \beta^2 - 2 \alpha \beta - 3 \alpha^2) \quad (15)$$

ver Bollerslev (1986).

El proceso GARCH(1,1) es MD y, por lo tanto, no está autocorrelacionado. Sin embargo, Bollerslev (1988) demuestra que la fac de y_t^2 viene dada por

$$\rho(1) = \alpha (1 - \alpha\beta - \beta^2) / (1 - 2 \alpha \beta - \beta^2) \quad (16.a)$$

$$\rho(h) = (\alpha + \beta)^{h-1} \rho(1), \quad h > 1. \quad (16.b)$$

Utilizando el mismo razonamiento que para el proceso ARCH(q) y dado que en el momento $t-1$, σ_{t-1}^2 es observable, es fácil demostrar que la distribución condicional de y_t es normal con media cero y varianza σ_t^2 .

Ejemplo. Considerar la serie de rendimientos diarios de la Bolsa de Madrid. Como ya hemos señalado anteriormente, esta serie presenta exceso de curtosis y autocorrelación en los cuadrados.

Ajustando un modelo GARCH(1,1) se obtienen las siguientes estimaciones

$$\hat{\sigma}_t^2 = 0,0327 + 0,1544 y_{t-1}^2 + 0,8342 \hat{\sigma}_{t-1}^2.$$

La figura 3 representa las estimaciones de σ_t obtenidas mediante este modelo que denotaremos por $s_{t-1} = \hat{\sigma}_t$. Obsérvese que la volatilidad tiene niveles más altos al comienzo

de la muestra, luego disminuye para empezar a incrementarse al final del periodo muestral. Analizando el gráfico 1 también es posible observar estos movimientos.

Las observaciones estandarizadas, $e_t = y_t / s_{y/t-1}$ tienen $\kappa_e = 4,5546$ y $Q_2(10) = 11,73$. La curtosis ha disminuido pero todavía es significativamente mayor que 3. Sin embargo las autocorrelaciones de e_t^2 ya no son significativas; ver cuadro 2 para un resumen de los resultados de la estimación.

En la figura 4 aparece representada la densidad estimada para e_t junto con la densidad normal. Es posible observar que la mayor divergencia entre ambas densidades aparece en el centro de la distribución, con una concentración de valores alrededor de cero muy superior a la que se esperaría si e_t siguiera una distribución normal. También es posible observar que las colas son más anchas que las de la distribución normal.

Finalmente, con respecto a la predicción de la varianza de un proceso GARCH(1,1), Engle y Bollerslev (1986) derivan la siguiente expresión del valor esperado de la varianza condicional en información disponible en T,

$$E_T(\sigma_{T+s}^2) = \omega / (1 - \alpha - \beta) + (\alpha + \beta)^{s-1} (\hat{\sigma}_{T+1}^2 - \omega / (1 - \alpha - \beta)).$$

Posteriormente Baillie y Bollerslev (1992), encuentran la expresión del ECM asociado con el error de predicción de dicha varianza condicional futura como

$$E_T(\nu_{T,s}^2) = (\kappa_2 - 1) \alpha^2 \sum_{i=1}^{s-1} (\alpha + \beta)^{2(i-1)} E_T(\sigma_{T+s-i}^4)$$

donde $\nu_{T,s} = \sigma_{T+s}^2 - E_T(\sigma_{T+s}^2)$ y κ_2 es el cumulante de orden 2 de la densidad condicional de e_t . Por ejemplo, si e_t es normal, $\kappa_2 = 3$.

Todas las propiedades descritas del proceso GARCH(1,1) pueden generalizarse al proceso GARCH(p,q), en el que σ_t^2 en (13.b) se sustituye por

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2.$$

Si los polinomios $\alpha(L)$ y $\beta(L)$ no tienen raíces comunes y todas las raíces de $\beta(L)$ están fuera del círculo unitario, Nelson y Cao (1992) proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la positividad de σ_t^2 .

La fac de y_t^2 de un proceso GARCH(p,q) es análoga a la de un proceso ARMA(p*,q) donde $p^* = \max(p,q)$, con parámetros autorregresivos $\phi_i = \alpha_i + \beta_i$, $i=1, \dots, p^*$ y parámetros de medias móviles $\theta_j = -\beta_j$, $j=1, \dots, q$; ver Bollerslev (1988).

5.3 IGARCH(1,1)

Como ya hemos señalado anteriormente el modelo GARCH(1,1) se ajusta adecuadamente a la mayoría de las series financieras, no siendo, en general, necesario ajustar procesos GARCH con órdenes mayores. Sin embargo, empíricamente se ha observado que las estimaciones de α y β son tales que $\hat{\alpha} + \hat{\beta} \approx 1$. Por ejemplo, para la serie de rendimientos diarios del índice de la Bolsa de Madrid, $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 0,9886$. El hecho de que la suma $\alpha + \beta$ está cerca de 1, indica que la varianza condicional evoluciona muy lentamente.

Si en el modelo GARCH(1,1) imponemos que $\alpha + \beta = 1$, el proceso ya no es estacionario, dado que la varianza marginal no es finita. Sin embargo, bajo normalidad condicional, y_t es estrictamente estacionario y ergódico; ver Nelson (1990) para el modelo GARCH(1,1) y Bougerol y Picard (1992) para el modelo GARCH(p,q). En este caso, (13.b) se convierte en

$$\sigma_t^2 = \omega + \sigma_{t-1}^2 + \alpha (y_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) \quad (17)$$

El proceso se denomina entonces IGARCH(1,1) (Integrated GARCH) y fué propuesto por Engle y Bollerslev (1986). El proceso IGARCH(1,1) es MD y, por lo tanto, las predicciones de valores futuros son cero. El ECM de dichas predicciones es

$$ECM(\hat{y}_{T+l}) = \omega l + \alpha y_T^2 + (1 - \alpha) \sigma_T^2 \quad (18)$$

En (18) es posible observar que el ECM de las predicciones crece linealmente con el horizonte de predicción. Si $\omega=0$, y en consecuencia el ECM es constante, el proceso IGARCH tiene la extraña propiedad de que σ_t^2 tiende a cero con probabilidad uno, es decir, la serie deja de ser aleatoria; ver Nelson (1990). En consecuencia, es fundamental que en el proceso IGARCH(1,1), ω sea estrictamente positivo.

Aunque en un proceso IGARCH(1,1) la varianza de las predicciones crece linealmente con el horizonte de predicción y, en consecuencia, el proceso es no estacionario, dichos procesos tienen un comportamiento bastante regular. Este fenómeno es debido a que, como demuestran Kleibergen y Van Dijk (1993), la probabilidad de un incremento en la varianza es menor que la probabilidad de una disminución y, por lo tanto, los "shocks" en la varianza probablemente no van a persistir por un periodo muy largo de tiempo. En este sentido la definición de no-estacionariedad puede resultar extraña debido a que no existe persistencia de los "shocks" a la varianza. Por ello, Keibergen y Van Dijk (1993) proponen una definición alternativa de estacionariedad que ellos denominan **estacionariedad cuasi-estricta**. Las condiciones para que un proceso GARCH(1,1) sea cuasi-estrictamente estacionario coinciden con las condiciones de estacionariedad estricta derivadas por Nelson (1990). Finalmente, Kleigbergen y Van Dijk (1993) sugieren que es mejor basar las predicciones de la volatilidad en la simulación directa de

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

que en las expresiones para la predicción que se han formulado anteriormente.

Cuando y_t es un proceso IGARCH(1,1), el comportamiento dinámico de y_t^2 es similar al de un proceso ARIMA(0,1,1).

5.4 EGARCH(p,q)

Nelson (1991) señala algunas limitaciones de los procesos GARCH. En primer lugar, las restricciones de no negatividad de los parámetros son frecuentemente violadas en la práctica. Además los modelos GARCH no son capaces de representar el efecto "apalancamiento" frecuentemente observado en las series de precios de activos financieros. Finalmente, debido al particular comportamiento de los procesos IGARCH que hemos señalado anteriormente, es difícil determinar lo que se entiende por persistencia en la varianza. Nelson propuso un nuevo modelo, que no tenía estas limitaciones, el GARCH exponencial (EGARCH). EL proceso EGARCH(p,q) viene dado por

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad (19.a)$$

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \log \sigma_{t-i}^2 + g(\varepsilon_{t-1}) + \sum_{i=1}^q \theta_i g(\varepsilon_{t-1-i}) \quad (19.b)$$

donde $\varepsilon_t \sim \text{IIDS}(0,1)$ y $g(\varepsilon) = \delta \varepsilon + \alpha [|\varepsilon| - E(|\varepsilon|)]$.

Por ejemplo, bajo normalidad de ε_t en el modelo EGARCH(1,0), (19.b) se convierte en

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \beta \log \sigma_{t-1}^2 + \delta \varepsilon_{t-1} + \alpha [|\varepsilon_{t-1}| - (2/\pi)^{1/2}], \quad (20)$$

y la estacionariedad se garantiza si $|\beta| < 1$. Los momentos de la distribución marginal de y_t han sido derivados por Nelson (1991) y tienen expresiones bastante complicadas. Sin embargo, las propiedades dinámicas de $\log(y_t^2)$ se pueden derivar fácilmente, utilizando las propiedades habituales de los modelos ARMA(p,q); ver, por ejemplo, Ruiz (1993).

Como en los modelos ARCH y GARCH descritos anteriormente, la varianza condicional de y_t es σ_t^2 , y por lo tanto, bajo normalidad de ε_t , la distribución condicional de y_t es normal.

Ejemplo. Para la serie de rendimientos diarios del Índice de la Bolsa de Madrid se ha estimado el modelo EGARCH(1,0) en (20) con los siguientes resultados

$$\log \sigma_t^2 = 0,0153 + 0,0023 \varepsilon_{t-1} + 0,2946 [|\varepsilon_{t-1}| - (2/\pi)^{1/2}] + 0,9657 \log \sigma_{t-1}^2.$$

La persistencia de la volatilidad, medida por el parámetro que acompaña a $\log \sigma_{t-1}^2$, es 0,9657 y, por lo tanto, cercana a la raíz unitaria. El parámetro que mide el efecto apalancamiento es 0,0023, muy cercano a cero. Las estimaciones de σ_t son muy similares a las obtenidas por el modelo GARCH(1,1). Las observaciones estandarizadas tienen una curtosis de 4,7073 y $Q_2(10)=12,49$. Nuevamente observamos que los residuos todavía tienen exceso de curtosis. La densidad estimada de e_t es muy similar a la obtenida con el modelo GARCH.

En la aplicación empírica presentada en este artículo, los ajustes proporcionados por el modelo GARCH y por el modelo EGARCH son muy similares. Sin embargo, Pagan y Schwert (1990) y Taylor (1991) en aplicaciones a rendimientos de activos financieros y tipos de cambio, observan que el modelo EGARCH proporciona mejores ajustes que el modelo GARCH. Higgins y Bera (1992) analizando tipos de cambio semanales también señalan que los datos parecen favorecer la modelización logarítmica de la varianza.

Nelson (1991) demuestra que para el proceso EGARCH(1,0) con normalidad condicional, el valor esperado de la varianza condicional en información en t es

$$E_t(\sigma_{t+s}^2) = \exp\{\omega(1-\beta^{s-1})/(1-\beta) + \beta^{s-1}\log(\sigma_{t+1}^2)\} \prod_{i=1}^{s-1} E[\exp\{\beta^{i-1}(\gamma\varepsilon_{t-i} + \alpha(|\varepsilon_{t-i}| - (2/\pi)^{1/2}))\}], \quad s \geq 2.$$

donde denotando la expresión entre corchetes por z , su valor esperado es

$$E(z) = [\Phi(\beta^{i-1}(\alpha-\gamma))\exp\{0,5\beta^{2(i-1)}(\gamma+\alpha)^2\} + \Phi(\beta^{i-1}(\alpha-\gamma))\exp\{0,5\beta^{2(i-1)}(\alpha-\gamma)^2\}]\exp\{-\beta^{i-1}\alpha(2/\pi)^{1/2}\}$$

donde Φ es la función de distribución de una variable normal estandar. Hasta el momento, no se han encontrado expresiones para los momentos de la distribución de los errores de predicción de la varianza.

5.5 Estimación y contrastes

En los modelos de volatilidad considerados hasta ahora si ε_t es normal, y_t es condicionalmente normal, y por lo tanto, la estimación por máxima verosimilitud (MV) de

los parámetros del modelo no presenta ninguna dificultad teórica; ver Bollerslev *et al.* (1993) para una revisión detallada sobre las propiedades del estimador MV de los modelos anteriores. Es importante señalar que los problemas habituales al estimar procesos con raíces unitarias en la media no aparecen en la estimación de modelos IGARCH; ver Lumsdaine (1991).

Además, es posible construir contrastes del multiplicador de Lagrange (LM) de homoscedasticidad. Por ejemplo, en el caso del modelo ARCH(q), el estadístico LM puede calcularse como TR^2 donde T es el tamaño muestral y R^2 es el coeficiente de determinación de la regresión de y_t^2 sobre $y_{t-1}^2, \dots, y_{t-q}^2$. En el caso del modelo GARCH(p, q), el principio del multiplicador de Lagrange no puede ser aplicado por un problema de multicolinealidad similar al que existe al tratar de contrastar la hipótesis nula de un ruido blanco frente a la alternativa de un proceso ARMA(p, q). El contraste de homoscedasticidad frente a un proceso GARCH(p, q) es el mismo que frente a un proceso ARCH(q). Los contrastes de interés en modelos ARCH son unilaterales por lo que Demos y Sentana (1991) y Lee y King (1991) han sugerido algunas correcciones para el contraste LM que lo tengan en cuenta. Robinson (1991) también presenta un contraste basado en LM para heterocedasticidad temporal de un tipo muy general.

Es posible realizar diversos contrastes sobre la especificación del modelo, por ejemplo, contrastes sobre la normalidad de ε_t , que pueden ser basados en las observaciones estandarizadas con las estimaciones de volatilidad. También se puede analizar la insesgadez de las estimaciones de la volatilidad realizando regresiones de y_t^2 sobre una constante y las estimaciones de la varianza; ver Pagan y Schwert (1990). Adicionalmente, el R^2 de esta regresión puede ser utilizado como una medida de bondad del ajuste de la especificación analizada. Si el modelo utilizado ha tenido éxito en ajustar la estructura dinámica de los

cuadrados de la serie, los residuos de dicha regresión no deben tener autocorrelación.

Ejemplo. En el cuadro 2 aparecen los resultados de dichas regresiones para los modelos GARCH y EGARCH ajustados a la serie de rendimientos del índice de Madrid. Ambos modelos parecen proporcionar estimaciones insesgadas de la volatilidad con ajustes parecidos. En cuanto a la autocorrelación de los residuos, ambos modelos tienen un estadístico Box-Ljung ligeramente significativo.

Bera y Zuo (1991) proponen un contraste de especificación para modelos ARCH que examina la constancia de la curtosis de las observaciones corregidas por heterocedasticidad y que es, a su vez, un contraste de la heterogeneidad de los parámetros ARCH.

Finalmente, es importante señalar que es posible considerar otras distribuciones de ε_t que tengan colas más anchas que las de la normal; recordar que, en los ejemplos, las observaciones estandarizadas utilizando las estimaciones de σ_t obtenidas con modelos GARCH y EGARCH, todavía tienen exceso de curtosis. En este sentido, Bollerslev (1987) considera el modelo GARCH(1,1) con errores t-Student. Nelson (1991) analiza el modelo EGARCH con errores que sigan una distribución estandar general (GED). La razón por la cual la familia de distribuciones GED es atractiva es que incluye la distribución normal como un caso particular y también incluye distribuciones con colas más anchas y más estrechas que las de la normal.

Finalmente, Bollerslev *et al.* (1993) han considerado la distribución t-generalizada, que incluye tanto a la distribución t como a la GED.

Una alternativa a la estimación MV es estimar semi-paramétricamente, aproximando la función de densidad, como ha sido propuesto por Gallant y Tauchen (1989) y Engle y Gonzalez-Rivera (1991).

5.6 Medias condicionales no nulas

En numerosas aplicaciones empíricas y_t no es la serie temporal analizada sino la perturbación de un modelo con estructura dinámica en la media. Engle (1982) considera modelos de regresión con efectos ARCH en las perturbaciones. Por ejemplo, si las perturbaciones siguen un modelo ARCH(1), el modelo sería:

$$y_t = x_t' \beta + u_t \quad (21)$$

$$u_t = \varepsilon_t \sigma_t$$

$$y \quad \sigma_t^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2.$$

Dado que las perturbaciones son ruido blanco, la estimación por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) de la regresión de y_t sobre x_t proporciona estimadores de β que son el "mejor estimador lineal insesgado". Sin embargo, aunque u_t no está autocorrelacionado, no es independiente, y por lo tanto el estimador MCO es ineficiente. Dada una distribución particular de ε_t , un estimador eficiente del modelo de regresión en (21) sería MV. Engle (1982) demuestra que en modelos como (21) la matriz de información es diagonal por bloques entre los parámetros de regresión β y los parámetros de la ecuación de la volatilidad, en este caso, ω y α .

Un caso particular del modelo (21) es cuando entre las variables x_t se encuentra la propia volatilidad o una transformación de ella. Algunas teorías financieras se basan en la idea de que a mayor volatilidad (incertidumbre) mayor rendimiento esperado; ver Merton (1980). Si σ_t fuera la única variable explicativa, el modelo econométrico capaz de representar este fenómeno sería

$$y_t = \delta \sigma_t + u_t$$

donde u_t es un proceso ARCH. Este modelo es conocido como ARCH-M y fué propuesto por Engle *et al.* (1987). El proceso ARCH-M tiene autocorrelación en los niveles. Por ejemplo,

si u_t es ARCH(1), Hong (1991) proporciona las siguientes expresiones para la fac

$$\rho(1) = 2 \alpha^3 \delta^2 \omega / [2 \alpha^2 \delta^2 \omega + (1-\alpha)(1-3\alpha^2)]$$

$$\rho(k) = \alpha^{k-1} \rho(1), k \geq 2.$$

La estimación de estos modelos por MV puede realizarse como con cualquier modelo ARCH, pero la matriz de información ya no es diagonal por bloques; ver, por ejemplo, Novales y Gracia-Diez (1993).

En cuanto a modelos univariantes de series temporales, Weiss (1984) considera procesos ARMA donde las perturbaciones son ARCH. Por otro lado, Harvey *et al.* (1992) incorporan efectos GARCH a las perturbaciones de modelos con componentes inobservables, donde, incluso asumiendo normalidad de las perturbaciones, el modelo no es condicionalmente normal.

6. Modelos de Volatilidad Estocástica

Los modelos basados en ARCH modelizan σ_t^2 en función de observaciones pasadas y, por lo tanto, la volatilidad en el momento t es observable en el momento $t-1$. Un enfoque alternativo consiste en modelizar σ_t^2 como un proceso estocástico, es decir, como una variable aleatoria inobservable. Estos modelos son conocidos como modelos de volatilidad estocástica (SV). Los modelos SV son aproximaciones en tiempo discreto de modelos en tiempo continuo habitualmente utilizados en la literatura financiera en, por ejemplo, modelos de valoración de opciones; ver Taylor (1991). Esta característica la comparten con los modelos EGARCH, pero Dassios (1992) demuestra que la aproximación de los modelos SV es mejor que la de los modelos EGARCH. Una comparación detallada entre las propiedades de los modelos ARCH y los modelos SV puede encontrarse en Ruiz (1993).

6.1 Modelos SV Estacionarios

En los modelos SV, habitualmente no se define directamente el proceso estocástico para σ_t^2 , sino para su logaritmo, de forma que se garantice la positividad de la varianza. En el caso más sencillo, podemos modelizar $\log(\sigma_t^2)$ como un proceso AR(1) obteniendo el siguiente modelo denominado ARV(1)

$$y_t = \sigma \cdot \varepsilon_t \sigma_t \quad (22.a)$$

$$\log \sigma_t^2 = \beta \log \sigma_{t-1}^2 + \eta_t \quad (22.b)$$

donde $\varepsilon_t \sim \text{IIDS}(0,1)$, $\eta_t \sim \text{NID}(0, \sigma_\eta^2)$ y ambas perturbaciones son mutuamente independientes. σ es un factor de escala. Las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la estacionariedad de y_t son las condiciones estandar para la estacionariedad de $\log(\sigma_t^2)$, es decir, en el modelo (22), $|\beta| < 1$.

Uno de los atractivos conceptuales de los modelos SV es que explícitamente diferencian la perturbación en el nivel, ε_t , y la perturbación que afecta a la volatilidad, η_t , mientras que en los modelos basados en ARCH solo existe una única perturbación, ε_t , que afecta al mismo tiempo al nivel y a la volatilidad.

Es fácil demostrar que y_t definido como en (22) es ruido blanco dado que la media es cero y que

$$E(y_t y_{t-\tau}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-\tau}) E(\sigma_t \sigma_{t-\tau}) = 0.$$

La distribución marginal de y_t no tiene una forma conocida, pero como en el caso de los modelos ARCH es simétrica. Si además asumimos normalidad de ε_t , los momentos pares de y_t pueden obtenerse utilizando resultados estandar para la distribución log-normal. En concreto,

$$\sigma_y^2 = \sigma^2 \cdot \exp \{0,5 \sigma_\eta^2\}$$

$$\kappa_y = 3 \exp \{\sigma_\eta^2\}$$

donde $\sigma_h^2 = \sigma_\eta^2 / (1 - \beta^2)$.

En consecuencia, si $\sigma_\eta^2 > 0$, y_t tiene exceso de curtosis con respecto a la distribución normal y además este exceso de curtosis es independiente del grado de persistencia en la volatilidad, medido por β .

La fac de y_t^2 y $\log(y_t^2)$ pueden encontrarse en Ruiz (1993). En concreto, $\log(y_t^2)$ es equivalente a un proceso ARMA(1,1). Además si σ_h^2 es pequeño y/o β está cerca de 1, la fac de y_t^2 es muy parecida a la de un proceso ARMA(1,1) y, por lo tanto, las propiedades de y_t son similares a las de un proceso GARCH(1,1); ver Taylor (1986).

El proceso ARV(1) puede generalizarse permitiendo que $\log(\sigma_t^2)$ siga cualquier proceso ARMA estacionario y sus propiedades se podrían deducir utilizando los mismos conceptos que anteriormente.

Ejemplo. Se ha ajustado el modelo (22) a la serie de rendimientos diarios del Índice de la Bolsa de Madrid con los siguientes resultados

$$\log \sigma_t^2 = 0,9932 \log \sigma_{t-1}^2$$

$$\hat{\sigma}_\eta^2 = 0,0340.$$

Un resumen de los resultados de la estimación aparece en el cuadro 2.

Los modelos SV permiten obtener estimaciones de la volatilidad, σ_t , no solo un periodo hacia adelante como los modelos basados en ARCH, sino también utilizando todas las observaciones en la muestra posteriores a t . Denotaremos a estas estimaciones por s_{tT} , y para obtenerlas se utilizará un algoritmo de alisado; ver, por ejemplo, Harvey (1989).

En la figura 5 pueden observarse las estimaciones de σ_t obtenidas con el modelo ARV(1) utilizando las observaciones hasta $t-1$ y utilizando todas las observaciones muestrales. Como puede observarse esta segunda serie es mucho más suave. Las observaciones estandarizadas utilizando s_{tT} tienen una curtosis de 3,6935 y $Q_2(10) = 8,44$. La curtosis es todavía

significativamente mayor que la de la normal pero notablemente inferior a la obtenida en los modelos GARCH(1,1) y EGARCH(1,0). Además, Harvey y Shephard (1993.b) señalan que la curtosis de las observaciones corregidas por heterocedasticidad tiende a ser mayor que la curtosis de ε_t , por lo que el resultado obtenido puede ser compatible con la distribución normal de ε_t . La figura 6 representa la densidad estimada de $e_t = y_t/s_{tT}$ junto con la densidad normal. Comparando la densidad ARV con las densidades GARCH y EGARCH, la densidad del modelo ARV se ajusta mejor en el centro de la distribución y peor en las colas a la densidad normal.

Para analizar la insesgadez de las estimaciones de la volatilidad, se han efectuado regresiones de y_t^2 sobre una constante y s_{tT}^2 . Los resultados de estas regresiones para aparecen en el cuadro 2, donde es posible observar que el ajuste proporcionado por el modelo ARV(1) es mejor que los ajustes proporcionados por los modelos GARCH(1,1) y EGARCH(1,0).

Teniendo en cuenta que el modelo ARV(1) proporciona estimaciones de σ_t con mejor ajuste y residuos más cercanos a la hipótesis de normalidad de ε_t , unido a su sencillez y fácil interpretación, se puede concluir que los modelos SV son una alternativa para la modelización de la volatilidad que debe tenerse muy en cuenta.

En cuanto a las predicciones de la volatilidad, la esperanza condicional puede aproximarse mediante

$$E_t(\sigma_{t+h}^2) \approx \exp\{\gamma (1 - \beta^{h-1}) / (1 - \beta) + \beta^{h-1} \log(s_{t+1/n}^2)\}.$$

6.2 Volatilidad Estocástica No Estacionaria

Como ya se señaló al analizar los modelos basados en ARCH, empíricamente se ha observado que frecuentemente en el comportamiento dinámico de la volatilidad parece existir una raíz unitaria. Esto también puede observarse en los modelos SV; nótese que en el

ejemplo anterior, el parámetro que mide la persistencia, β , es igual a 0,9932. Por ello, es interesante considerar modelos SV que contengan una raíz unitaria. El modelo más sencillo posible es el paseo aleatorio para $\log(\sigma^2)$:

$$y_t = \varepsilon_t \sigma_t \quad (23.a)$$

$$\log \sigma_t^2 = \log \sigma_{t-1}^2 + \eta_t \quad (23.b)$$

donde $\varepsilon_t \sim \text{IIDS}(0,1)$, $\eta_t \sim \text{NID}(0, \sigma_\eta^2)$ y ambas perturbaciones son mutuamente independientes.

Considerando la transformación

$$\log y_t^2 = h_t + \log \varepsilon_t^2 \quad (24.a)$$

$$h_t = h_{t-1} + \eta_t \quad (24.b)$$

donde $h_t = \log \sigma_t^2$, y tomando primeras diferencias

$$\nabla \log y_t^2 = \eta_t + \nabla \log \varepsilon_t^2 \quad (25)$$

es fácil comprobar que $\log(y_t^2)$ es un proceso ARIMA(0,1,1) y, por lo tanto, el mejor predictor de h_t es el algoritmo de medias móviles ponderadas exponencialmente (EWMA); ver Harvey (1989). Este resultado señala el paralelismo de (23) con el modelo IGARCH donde

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha y_{t-1}^2 + (1-\alpha) \sigma_{t-1}^2 \quad (26)$$

que es la ecuación de EWMA para σ_t^2 .

Una ventaja del modelo (24) sobre el modelo IGARCH es que contiene un parámetro menos, ya que no es necesario incluir en la ecuación de la volatilidad el término constante, que en el modelo IGARCH era necesario para evitar que el proceso degenerara.

Ejemplo. Este ejemplo ha sido tomado de Harvey *et al.* (1994), donde se analiza la serie diaria del tipo de cambio de la libra frente al dolar desde 1 de Octubre de 1981 hasta 28 de Junio de 1985. La serie analizada, y_t , son las primeras diferencias del logaritmo del tipo de cambio con la media muestral sustraída por conveniencia. El estadístico Box-Ljung para 10

retardos es 11,19, indicando que no existe estructura dinámica en el nivel de la serie. Sin embargo, el estadístico $Q_2(10)$ es 128,45 siendo una fuerte evidencia de dinamismo en los cuadrados de la serie.

Ajustando a la serie el model ARV(1) en (22), se obtiene una estimación $\hat{\beta}=0,991$. Cuando se estima el modelo (23), se obtiene un ajuste casi tan bueno como en el caso anterior con $\hat{\sigma}_\eta^2=0,0042$. La figura 7 muestra las estimaciones suavizadas de la volatilidad, s_{vT} .

Finalmente conviene señalar que se debe tener cierta precaución ante la estimación de raíces unitarias en la volatilidad. Como en el caso del nivel, dicha estimación puede ser debida a cambios estructurales en el proceso de la volatilidad. Considérese, por ejemplo, el caso del tipo de cambio diario del Yen frente al Dolar tambien analizado en Harvey *et al.* (1994). En la figura 8, que representa s_{vT} , puede observarse que parece existir un cambio en el nivel de la volatilidad que puede haber provocado que la estimación de β en el modelo ARV(1) sea 0,9948.

6.3 Estimación y contrastes

La principal desventaja de los modelos SV es que incluso asumiendo que $\{\epsilon_t\}_{t=1}^T$ es un proceso Gaussiano, y_t no es condicionalmente normal. En consecuencia, la estimación de estos modelos puede presentar ciertas dificultades. En la literatura se han propuesto principalmente tres tipos de métodos para su estimación.

El primer grupo de métodos se basa en el principio del método de momentos (MM); ver, por ejemplo, Taylor (1986) y Melino y Turnbull (1990). Estos métodos tienen la desventaja de que su eficiencia depende de los momentos usados para la estimación. Además, pueden surgir problemas numéricos en la optimización de la función objetivo cuando β está cerca de la unidad, lo que es frecuente en aplicaciones empíricas. Una comparación de la eficiencia de

estos métodos en relación al método de Pseudo-Máxima-Verosimilitud (PMV) descrito posteriormente puede encontrarse en Ruiz (1994).

El segundo grupo de métodos se basa en la utilización de simulaciones para calcular estimaciones MV; ver Danielsson (1992), Jacquier *et al.* (1994) y Shephard (1993). Hay ventajas evidentes en utilizar un método MV frente a un método basado en momentos, pero los métodos MV son, en general, complicados y requieren mucho tiempo de ordenador para la estimación.

Finalmente, Harvey *et al.* (1994) y Nelson (1988) han propuesto independientemente un método basado en PMV que vamos a describir en detalle, dado que es el método adoptado en este artículo para obtener las estimaciones.

El método PMV se basa en la transformación logarítmica de los cuadrados de y_t en (22):

$$\log y_t^2 = \log \sigma^2 + h_t + \log \varepsilon_t^2 \quad (27.a)$$

$$h_t = \beta h_{t-1} + \eta_t \quad (27.b)$$

$\log(y_t^2)$ en (27) tiene una representación de modelo del espacio de los estados lineal y, por lo tanto, el filtro de Kalman es susceptible de ser aplicado; para una descripción del modelo del espacio de los estados ver, por ejemplo, Harvey (1989). La media y la varianza de $\log(\varepsilon_t^2)$ dependen de la distribución de ε_t . Si, por ejemplo, $\varepsilon_t \sim N(0,1)$, entonces $E[\log \varepsilon_t^2] \approx 1,27$ y $\text{Var}[\log \varepsilon_t^2] = \pi^2/2$; ver Abramowitz y Stegun (1970). Es posible obtener un modelo del espacio de los estados con una ecuación de medida que tenga media cero mediante:

$$\log y_t^2 = \omega + h_t + \xi_t \quad (28.a)$$

$$h_t = \beta h_{t-1} + \eta_t \quad (28.b)$$

donde $\omega = E(\log \varepsilon_t^2) + \log \sigma^2$ y $\xi_t = \log \varepsilon_t^2 - E(\log \varepsilon_t^2)$.

Se puede demostrar que aun cuando ε_t y η_t estuvieran mutuamente correlacionadas ξ_t y η_t no

lo estan; ver Harvey *et al.* (1994). Por lo tanto, el único problema para aplicar el filtro de Kalman a (28) es que la distribución de ξ_t solo es normal si ε_t^2 es log-normal, hipótesis que no parece muy realista. En consecuencia, si ξ_t no es normal, el filtro de Kalman solo proporcionará estimaciones de h_t con ECM mínimo entre los estimadores lineales. Además utilizando el filtro de Kalman y debido a que el modelo no es condicionalmente normal, no es posible obtener la expresión de la verosimilitud exacta. Sin embargo, es posible obtener estimaciones de los parámetros desconocidos, β y σ_η^2 , tratando ξ_t como si fuera normal y maximizando la pseudo-verosimilitud resultante. La distribución asintótica del estimador PMV puede obtenerse utilizando resultados en Dunsmuir (1979); ver Ruiz (1994), donde tambien se realizan algunos experimentos de Monte Carlo para estudiar el comportamiento del estimador PMV en tamaños de muestra finitos.

El modelo (22) tambien puede estimarse asumiendo que ε_t tiene una distribución t o una distribución GED. Por ejemplo, en el caso de que $\varepsilon_t \sim t_\nu$,

$$E[\log \varepsilon_t^2] \approx -1,27 - \psi(\nu/2) + \log(\nu/2) \quad (29.a)$$

$$y \quad \text{Var}[\log \varepsilon_t^2] = \pi^2/2 + \psi'(\nu/2) \quad (29.b)$$

donde $\psi(\cdot)$ y $\psi'(\cdot)$ son la función digamma y trigamma respectivamente. En este caso, es necesario estimar σ_ξ^2 como un parámetro más del modelo y utilizar (29.b) para ver cuantos grados de libertad implica dicha estimación. Ruiz (1994) muestra como, aun en el caso de que ε_t sea normal, es más eficiente estimar β y σ_η^2 sin asumir ningún valor concreto para σ_ξ^2 . El método PMV puede aplicarse sin dificultades teóricas adicionales al caso en el h_t es un paseo aleatorio. La única dificultad que se plantea en este sentido es contrastar la presencia de la raiz unitaria en $\log(\sigma^2)$. Los contrastes habituales de raices unitarias sobre $\log(y^2)$ no son de mucha utilidad práctica, debido a que $\log(y^2)$ tiene un comportamiento muy parecido a un ruido blanco y, en consecuencia, dichos contrastes rechazan la hipótesis nula demasiado

a menudo; ver Schwert (1989).

El contraste de volatilidad estocástica podría plantearse como el contraste de la hipótesis $\sigma^2_{\eta}=0$. Sin embargo, dicho contraste tampoco tiene las propiedades habituales debido a que bajo la hipótesis nula $\nabla \log(y^2_t)$ no es un proceso invertible.

6.4 Extensiones de los modelos de volatilidad estocástica

En este apartado se consideran dos extensiones básicas de los modelos SV: a) la incorporación de asimetrías en la respuesta de la volatilidad a cambios positivos y negativos en los precios, es decir, el efecto "apalancamiento" y b) modelos con medias condicionales no nulas y perturbaciones con volatilidad estocástica.

a) Efecto "apalancamiento"

Para incorporar el efecto "apalancamiento" en los modelos SV, Harvey y Shephard (1993.b) proponen un modelo como (22) donde ε_t y η_t están mutuamente correlacionadas con coeficiente de correlación ρ , pero son mutuamente independientes en distintos periodos de tiempo. Como hemos mencionado anteriormente, al tomar logaritmos de los cuadrados en el modelo (22), se pierde la información sobre la correlación entre ε_t y η_t . Para solucionar este problema, Harvey y Shephard proponen realizar inferencia condicional en los signos de las observaciones y_t . El modelo que proponen puede ser estimado por PMV, pero para obtener estimaciones de ρ es necesario hacer supuestos sobre las distribuciones de ε_t y η_t .

La forma de incorporar el efecto "apalancamiento" en los modelos SV propuesta por Harvey y Shephard, tiene una limitación importante desde el punto de vista empírico. El modelo está diseñado para representar correlaciones entre la volatilidad en un periodo determinado y el cambio en el precio en el periodo inmediatamente anterior. Sin embargo, empíricamente no es infrecuente observar que existe correlación entre la volatilidad en un periodo y el cambio

en el precio dos o más periodos hacia atrás; ver Engle y Lee (1993). Considérese el siguiente ejemplo. En el cuadro 1, $Q_3(\tau)$ es la correlación muestral entre y_t e $y_{t-\tau}^2$. Cuando $\tau < 0$, esta correlación es una indicación del efecto "apalancamiento", ya que mide la relación entre el rendimiento presente y la volatilidad futura. Para la serie de rendimientos del Índice de la Bolsa de Madrid, $Q_3(-1)$ no es significativo, pero lo son $Q_3(-2)$ y $Q_3(-5)$, por lo que sería deseable disponer de modelos que permitan mayor flexibilidad que el modelo propuesto por Harvey y Shephard.

Una especificación alternativa para incorporar el efecto "apalancamiento" en los modelos de volatilidad estocástica es incluir directamente y_t , o alguna transformación que conserve su signo, en la ecuación de la volatilidad. Hasta ahora no se han analizado las propiedades teóricas de los modelos que utilizan esta alternativa pero puede verse un ejemplo empírico en Peña y Ruiz (1994).

b) *Modelos con medias condicionales no nulas y perturbaciones con volatilidad estocástica.*

Harvey y Shephard (1993.a) consideran el siguiente modelo de regresión con perturbaciones con volatilidad estocástica

$$y_t = x_t' \beta + u_t, t=1, \dots, T \quad (30)$$

donde u_t sigue el modelo ARV(1) en (22). Es fundamental suponer que u_t es un proceso estacionario, ya que en este caso, el estimador de MCO de β es consistente. Si denotamos por $\hat{\beta}$ a dicho estimador, el modelo ARV(1) puede ser ajustado a los residuos $\hat{u}_t = y_t - x_t' \hat{\beta}$, para obtener estimaciones de σ_t , mediante $\exp\{0.5 h_{t,T}\}$. Estas estimaciones pueden utilizarse para corregir el modelo (30) por heterocedasticidad y obtener así un estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG) factibles.

Entre las variables explicativas en (30) puede estar la propia volatilidad y obtener así un modelo con efectos de la volatilidad en la media. Considerar, por ejemplo, el siguiente

modelo

$$y_t = \delta \sigma_t + \sigma_t \varepsilon_t = \sigma_t (\delta + \varepsilon_t). \quad (31)$$

Tomando logaritmos de los cuadrados en (31) obtenemos la expresión

$$\log y_t^2 = \log \sigma_t^2 + h_t + \log (\delta + \varepsilon_t)^2. \quad (32)$$

Como ya se ha explicado anteriormente, los parámetros β , σ_η^2 y σ_ε^2 pueden ser estimados por PMV. El parámetro δ puede ser después estimado mediante

$$\hat{\delta} = \sum_{t=1}^T \frac{\tilde{y}_t}{T \tilde{\sigma}_t^2}$$

donde \tilde{y}_t son las observaciones corregidas por heterocedasticidad y $\tilde{\sigma}_t^2$ es la varianza de dichas observaciones corregidas. Cuando $\delta=0$, $\hat{\delta}$ es asintóticamente normal con media cero y varianza $1/T$, resultado que proporciona un contraste para la presencia de volatilidad estocástica en la media.

7. Especificaciones Multivariantes

Muchos modelos de valoración de activos, formación de carteras con riesgo y estructura intertemporal de los tipos de interés se desarrollan en un contexto multivariante. En consecuencia, existe un creciente interés por la modelización de las relaciones dinámicas entre las volatilidades de distintos activos financieros en un único mercado o entre las volatilidades en distintos mercados nacionales o internacionales. En esta sección se considerará en primer lugar la generalización multivariante de los modelos basados en ARCH y a continuación de los basados en SV.

7.1 Modelos ARCH

El modelo ARCH(q) multivariante fué introducido inicialmente por Kraft y Engle (1983) y generalizado posteriormente por Bollerslev *et al.* (1988) al modelo GARCH(p, q) multivariante que tiene la siguiente expresión

$$y_t = \varepsilon_t \Omega_t^{1/2} \quad (33.a)$$

$$\text{vech}(\Omega_t) = W + \sum_{i=1}^q A_i \text{vech}(y_{t-i} y'_{t-i}) + \sum_{i=1}^p B_i \text{vech}(\Omega_{t-i}) \quad (33.b)$$

donde y_t es un vector de orden N , $\varepsilon_t \sim \text{NID}(0, I)$, W es un vector de orden $N(N+1)/2$, A_i y B_i son matrices de orden $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$ y $\text{vech}(\cdot)$ es el operador que vectoriza la parte inferior de una matriz $N \times N$ como un vector de orden $N(N+1)/2$.

El número de parámetros a estimar en (33) es $0,5N(N+1)[1+N(N+1)(p+q)/2]$, por lo que en la práctica es necesario imponer restricciones sobre los parámetros para que el modelo sea manejable. Otro problema adicional del modelo (33) es como garantizar que la matriz Ω_t sea positiva definida para cualquier t .

Para reducir el número de parámetros, Bollerslev *et al.* (1988) asumen que las matrices A_i y B_i son diagonales, pero esto no garantiza la positividad de Ω_t y además la representación resultante parece muy restrictiva. Posteriormente Bollerslev (1990) propuso el modelo de correlación constante como una alternativa escueta de modelos multivariantes, pero dicho modelo implica restricciones en el comportamiento dinámico de las volatilidades que deben ser contrastadas en la realidad.

Esta breve introducción a los modelos GARCH multivariantes es suficiente para reflejar la complejidad de dichos modelos debido al elevado número de parámetros que es necesario estimar y a la necesidad de garantizar que las matrices Ω_t sean definidas positivas. Además existe otra complicación relacionada con la presencia de movimientos comunes en las volatilidades; ver, por ejemplo, Black (1976). Para modelizar estos movimientos comunes

Engle (1987) propuso el modelo ARCH-factorial donde la matriz de covarianzas condicional depende de las varianzas condicionales de k combinaciones lineales ortogonales de y_t . El modelo ARCH-factorial puede ser estimado por MV pero debido a su elevado número de parámetros pueden encontrarse dificultades computacionales en su estimación. Engle *et al.* (1990) propusieron un procedimiento en dos etapas para solucionar este problema.

La presencia de movimientos comunes y la presencia de raíces unitarias han llevado a la necesidad de definir que se entiende por co-integración en la volatilidad. En este sentido, Bollerslev y Engle (1993) definen dicho concepto para modelos IGARCH multivariantes, pero nuevamente se plantean las mismas dificultades que en la definición de persistencia en la volatilidad de los modelos univariantes.

Un modelo alternativo que no se puede incluir en la familia ARCH es el propuesto por Diebold y Nerlove (1989). En dicho modelo los movimientos comunes en la volatilidad dependen de un factor latente inobservable que tiene efectos ARCH. Sin embargo, este factor latente también implica movimientos comunes en los niveles y , en teoría, puede ser interesante diferenciar movimientos comunes en los niveles de movimientos comunes en la volatilidad.

En cuanto a la generalización multivariante de los modelos EGARCH, esta parece bastante complicada. Braun *et al.* (1992) presentan una aplicación bivalente.

7.2 Modelos SV Multivariantes

La generalización multivariante de los modelos SV es más sencilla que la de los modelos GARCH. Ello es debido a que no es necesario preocuparse por condiciones para garantizar la positividad de las matrices de covarianzas y a que la modelización de movimientos comunes en la volatilidad y la noción de co-integración son sencillas utilizando definiciones

habituales en modelos multivariantes en los niveles.

El modelo SV multivariante se define como

$$y_{it} = \sigma_{\varepsilon_i} \varepsilon_{it} \exp\{0,5 h_{it}\} \quad (34.a)$$

donde $\varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{Nt})' \sim \text{NID}(0, \Sigma_\varepsilon)$ y $h_t = (h_{1t}, \dots, h_{Nt})'$ es un vector que, por ejemplo, sigue la autorregresión

$$h_t = \Phi h_{t-1} + \eta_t \quad (34.b)$$

donde $\eta_t \sim \text{NID}(0, \Sigma_\eta)$. El supuesto de normalidad de las distribuciones puede ser relajado sin que ello suponga grandes dificultades teóricas en el análisis. Si las volatilidades son integradas de orden 1 entonces $\Phi = I$. El modelo (34) no permite que las covarianzas condicionales evolucionen independientemente de las varianzas condicionales. En este sentido, el modelo tiene restricciones similares a las del modelo GARCH de correlación constante.

Las tendencias comunes en la volatilidad pueden ser incorporadas de forma sencilla en el modelo (34) con $\Phi=I$. En este caso, la dimensión de h_t es menor que N y, después de linealizar el modelo como en el caso univariante, el modelo viene dado por

$$w_t = \Theta h_t^* + \tilde{h} + \xi_t \quad (35.a)$$

$$h_t^* = h_{t-1}^* + \eta_t^* \quad (35.b)$$

donde $w_{it} = \log(y_{it}^2)$, h_t^* es de dimensión $k < N$, Θ es una matriz $N \times k$ de coeficientes y \tilde{h} es un vector $N \times 1$ de constantes. En el modelo (35) hay $N-k$ combinaciones lineales de los elementos en w_t que son estacionarios y, por lo tanto, dichos elementos están co-integrados. Los modelos SV multivariantes pueden ser estimados por PMV utilizando el filtro de Kalman para calcular los errores de predicción un periodo hacia adelante y sus varianzas.

8. Conclusiones y sugerencias para investigaciones futuras

En este artículo se han analizado algunos de los modelos más utilizados en la literatura para modelizar volatilidades. Sin embargo, existen otros muchos modelos propuestos en los últimos años. Sin pretender ser exhaustivos, algunos ejemplos son:

(i) los modelos **bilineales** de Granger y Andersen (1978). Weiss (1986) y Higgins y Bera (1989) realizan sendas comparaciones de estos modelos con los modelos ARCH.

(ii) Higgins y Bera (1992) y Ding *et al.* (1993) proponen dos generalizaciones basadas en transformaciones de Box-Cox que incluyen a la gran mayoría de los modelos ARCH propuestos en la literatura.

iii) Gouriéroux y Monfort (1992) proponen un modelo ARCH por umbrales en el que la media y la varianza son funciones escalonadas del conjunto de información pasada. Este modelo tiene cierta esencia no paramétrica.

(iv) Recientemente, Engle y Lee (1993) han propuesto un modelo GARCH con componente permanente en la volatilidad, cuyas propiedades puede ser de interés comparar con las de los modelos SV no estacionarios.

Como puede observarse el número de modelos propuestos para la volatilidad es muy amplio, aunque en la práctica, muy pocos de ellos son habitualmente utilizados y estos son los que se han considerado en este artículo.

Existen numerosas vías de investigación en las que seguir avanzando. Por ejemplo, al describir las propiedades empíricas de las series financieras, mencionamos que no es extraño encontrar efectos estacionales en la volatilidad. Por ejemplo, en el caso de series observadas hora a hora, la volatilidad puede cambiar durante el día reflejando las horas de descanso para la comida: Tokio de 4 a 5 y Londres de 12 a 13; ver, por ejemplo, Dacorogna *et al.* (1990). Habitualmente estos efectos se han modelizado mediante variables ficticias, como en Baillie

y Bollerslev (1991), pero dada la longitud de las series esta especificación determinista puede ser poco flexible. Sería interesante investigar especificaciones que permitan que los efectos estacionales puedan evolucionar en el tiempo. Este tipo de formulación se puede incorporar fácilmente en un modelo SV.

Después de describir las propiedades teóricas y empíricas de los modelos SV más sencillos, parece que se debiera concluir que estos son una alternativa muy a tener en cuenta al modelizar volatilidades. Sin embargo, el estudio de las propiedades teóricas de estos modelos no está tan avanzado ni su utilización empírica tan extendida como en el caso de los modelos ARCH. Esto deja abiertas numerosas posibilidades de investigación sobre dichos modelos.

Cuadro 1. Momentos muestrales de algunas series de rendimientos financieros.

	Ind. Madrid*	Pta/Dolar
y_t		
Media	-0,0417	-0,0404
Varianza	1,3740	0,4766
Asimetría	0,0114	0,1219
Curtosis	7,3253	4,5135
$r(1)$	0,0095	-0,0374
$r(5)$	0,0347	0,1150
$Q(10)$	11,36	13,85
y_t^2		
$r_2(1)$	0,2112	0,0469
$r_2(5)$	0,2054	0,0041
$Q_2(10)$	109,25	26,06
$y_t y_{t-\tau}^2$		
$Q_3(-5)$	-0,1670	0,0717
$Q_3(-2)$	-0,1867	0,0214
$Q_3(-1)$	-0,0163	0,0917
$Q_3(1)$	-0,0100	0,0059
$Q_3(2)$	-0,0646	-0,0137
$Q_3(5)$	-0,0968	0,0777

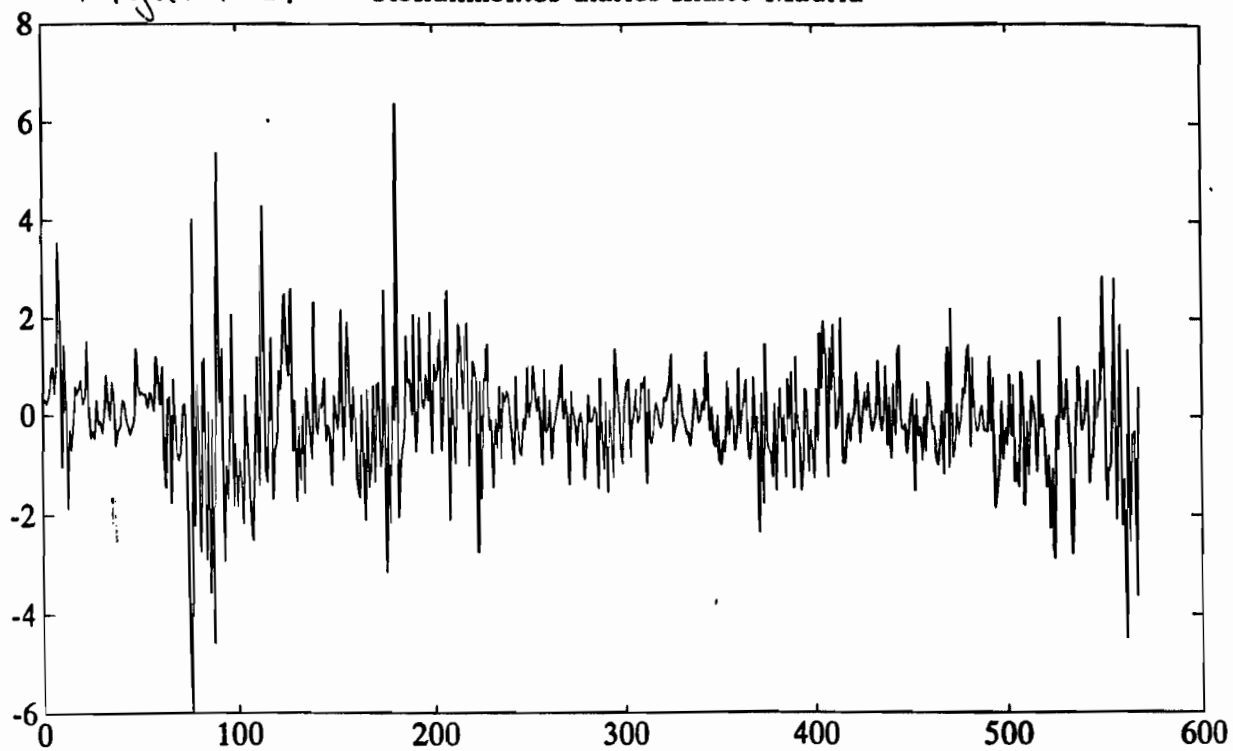
* Residuos del modelo MA(1):

$$y_t = a_t + 0,1219 a_{t-1}$$

Cuadro 2. Modelos para la volatilidad de los rendimientos diarios del Índice de la Bolsa de Madrid desde 1 de Marzo de 1990 hasta 2 de Octubre 1992.

	GARCH(1,1)	EGARCH(1,0)	ARV(1)
ω	0,0327	0,0153	-
α	0,1544	0,2946	-
β	0,8342	0,9657	0,9932
δ	-	0,0023	-
σ^2_{η}	-	-	0,0340
σ^2_{ξ}	-	-	6,0004
σ_{ϵ}	-	-	4,0210
log L	0,5215	0,52	1,4315
e_t			
σ^2_{ϵ}	0,9882	1,0051	1,0000
κ_{ϵ}	4,5546	4,7073	3,6935
$Q_2(10)$	11,73	12,49	8,44
Regresión			
a_0	0,3625	0,2053	-0,4330
a_1	0,6924	0,8525	1,4754
R^2	0,0873	0,0843	0,1593
$Q(10)$	21,88	21,26	23,08

Figura 1.- Rendimientos diarios Indice Madrid



1 Marzo 1990 - 2 Octubre 1992

Figura 2.- Incrementos Porcentuales Diarios Peseta-Dolar

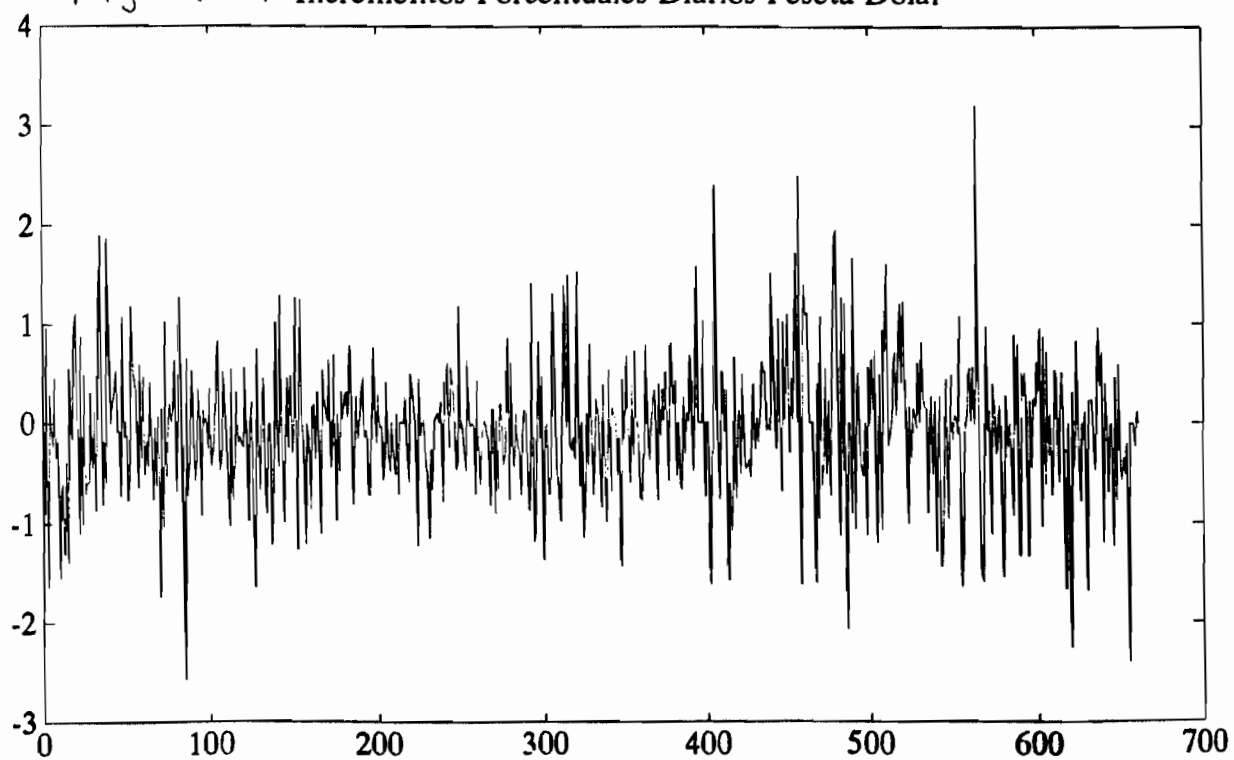


Figura 3.- Estimaciones de Volatilidad GARCH(1,1)

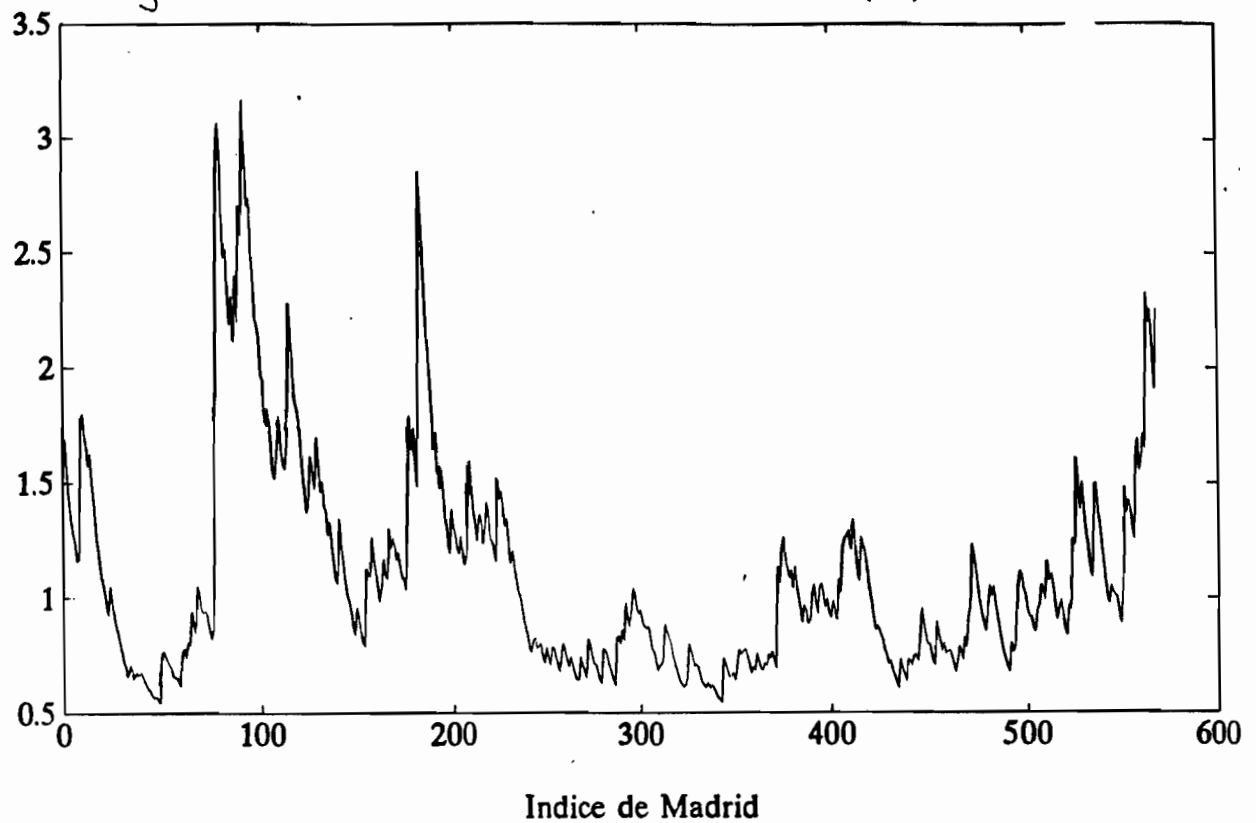


Figura 4.- Densidad GARCH(1,1) y Normal

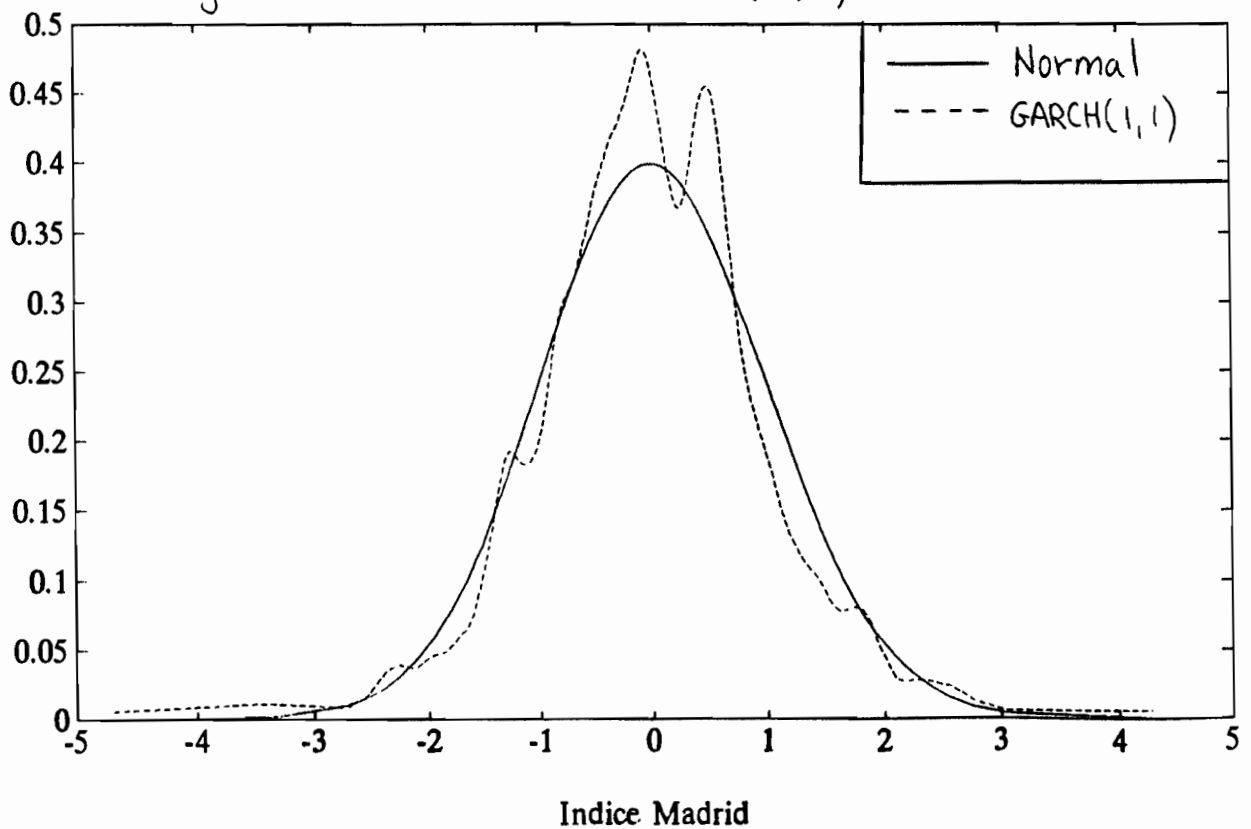


Figura 5. - Estimaciones Volatilidad ARV(1)

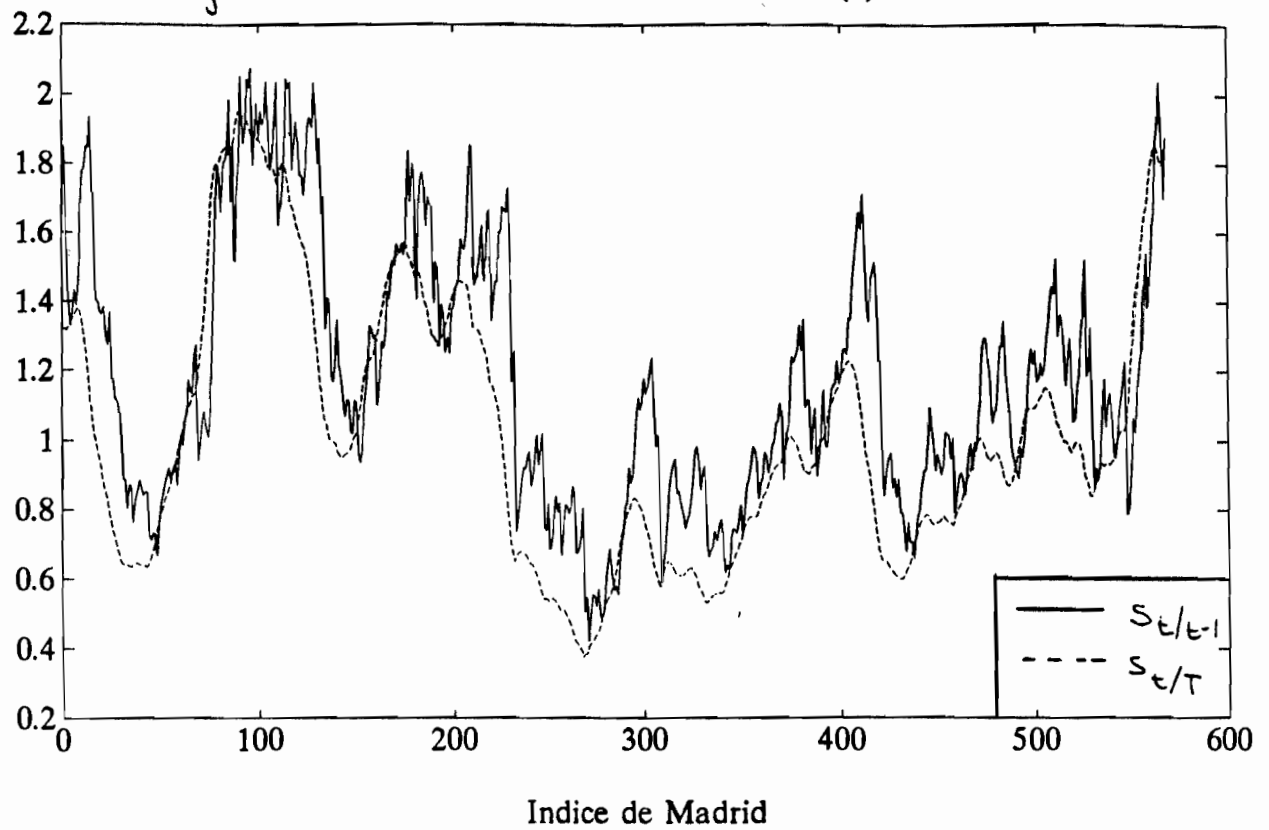


Figura 6. - Densidad ARV(1) y Normal

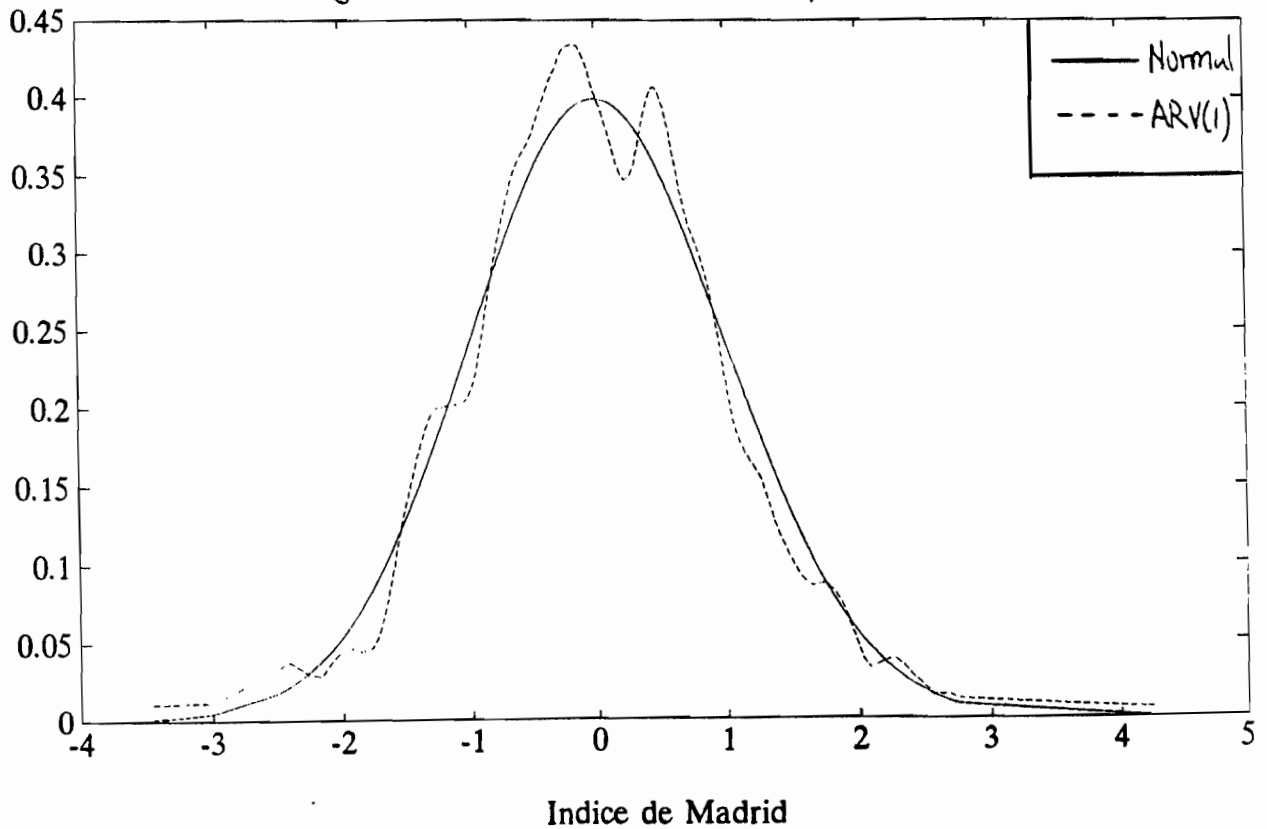


Figura 7.- Estimaciones de volatilidad y valores absolutos del tipo de cambio Libra / Dólar

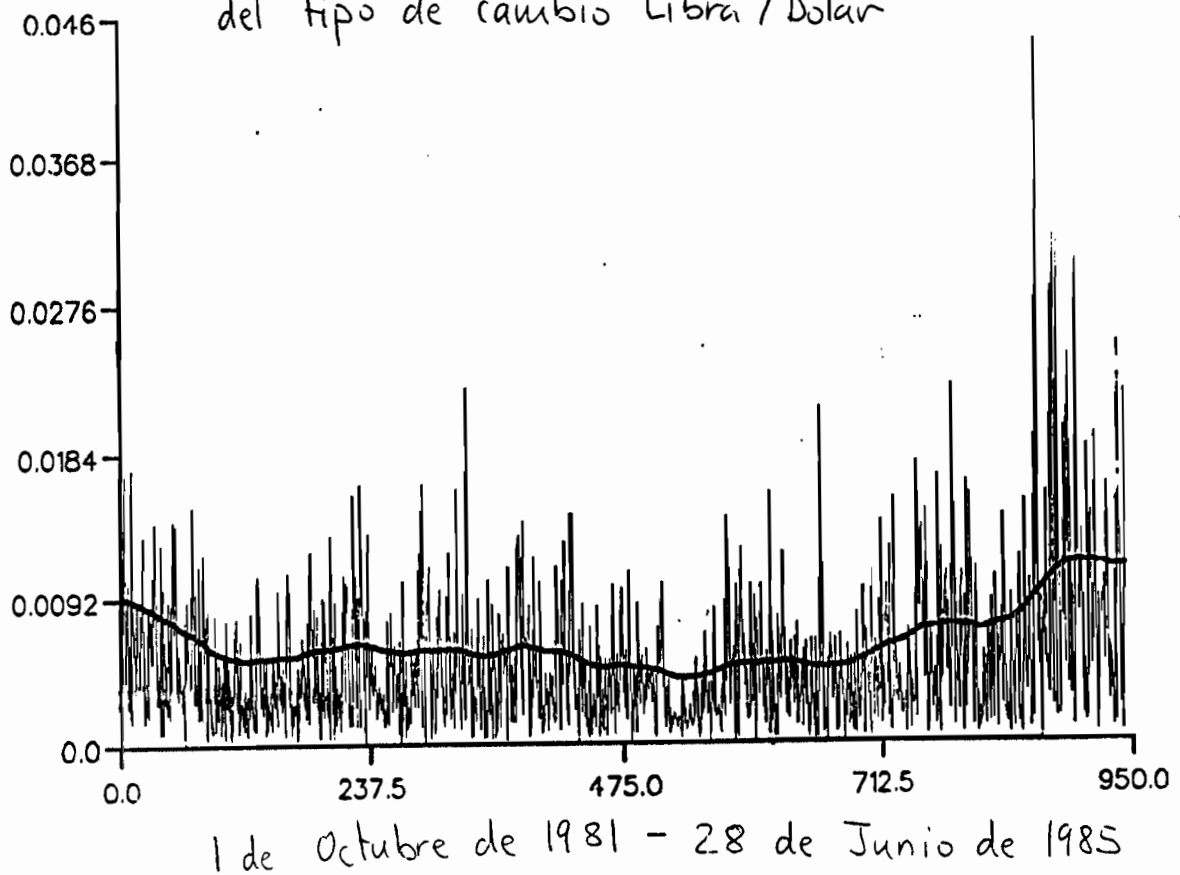
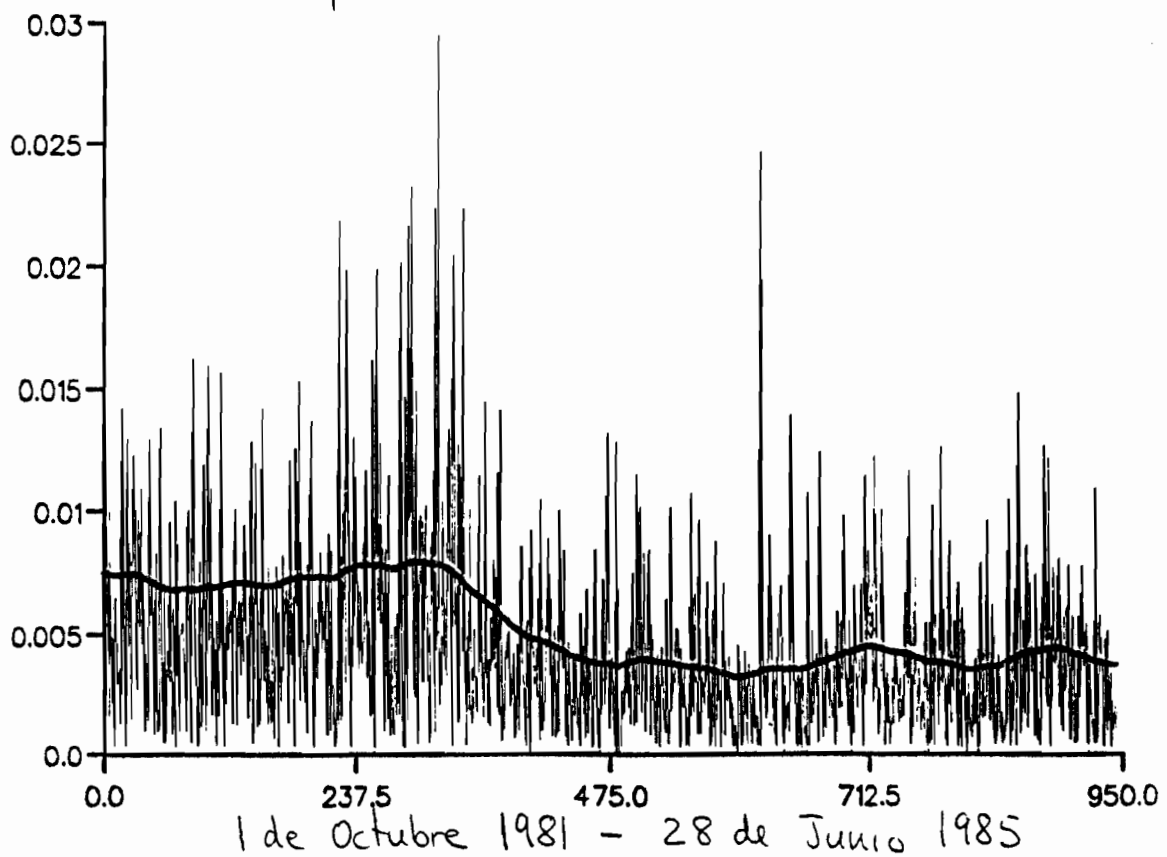


Figura 8. Estimaciones de volatilidad y valores absolutos del tipo de cambio Yen / Dólar



REFERENCIAS

Abramowitz, M. y N.C. Stegun (1970), Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications Inc., New York

Baillie, R.T. y T. Bollerslev (1989), The Message in Daily Exchange Rates: A Conditional Variance Tale, Journal of Business and Economic Statistics, 7, 297-305

Baillie, R.T. y T. Bollerslev (1991), Intra Day and Inter Day Volatility in Foreign Exchange Rates, Review of Economic Studies, 58, 565-585

Baillie, R.T. y T. Bollerslev (1992), Prediction in Dynamic Models with Time-Dependent Conditional Variances, Journal of Econometrics, 52, No. 1/2, 91-113

Bera, A.K. and M.L. Higgins (1993), A Survey of ARCH Models: Properties, Estimation and Testing, Journal of Economic Surveys, forthcoming

Bera, A.K. y X. Zuo (1991), Specification Test for a Linear Regression Model with ARCH Process, manuscrito, Dpto. de Economía, Universidad de Illinois at Urbana-Champaign

Bera, A.K., M.L. Higgins y S. Lee (1992), Interaction Between Autocorrelation and Conditional Heteroskedasticity: a Random Coefficient Approach, Journal of Business and Economic Statistics, 10, 133-142

Black, F. (1976), Studies of Stock Price Volatility Changes, Proceedings from the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, 177-181

Bollerslev, T. (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics, 31, 307-327

Bollerslev, T. (1987), A Conditional Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return, Review of Economics and Statistics, 69, 542-547

Bollerslev, T. (1988), On the Correlation Structure for the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process, Journal of Time Series Analysis, 9, 121-131

Bollerslev, T. (1990), Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach, Review of Economics and Statistics, 72, 498-505

Bollerslev, T. y R.F. Engle (1993), Common Persistence in Conditional Variances, Econometrica, 61, 167-86

Bollerslev, T., R.Y. Chou and K.F. Kroner (1992), ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence, Journal of Econometrics, 52, 5-59

Bollerslev, T., R.F. Engle and D.B. Nelson (1993), ARCH Models, The Handbook of Econometrics, Vol.4, forthcoming

- Bollerslev, T., R.F. Engle y J.M. Wooldridge (1988), A Capital Asset Pricing Model with Time Varying Covariances, Journal of Political Economy, 96, 116-131
- Bougerol, P. y N. Picard (1992), Stationarity of GARCH Processes and Some Nonnegative Time Series, Journal of Econometrics, 52, 115-128
- Braun, P.A., D.B. Nelson y A.M. Sunier (1992), Good News, Bad News, Volatility and Betas, manuscrito, Graduate School of Business, Universidad de Chicago
- Christie, A.A. (1982), The Stochastic Behavior of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Effects, Journal of Financial Economics, 10, 407-432
- Dacorogna, M.M., U.A. Müller, R.J. Nagler, R.B. Olsen y O.V. Pictet (1990), Modeling the Daily and Weekly Seasonal Volatility in the Foreign Exchange Market, manuscrito, Olsen & Associates, Zurich
- Danielsson, J. (1992), Stochastic Volatility in Asset Prices: Estimation with Simulated Maximum Likelihood, Journal of Econometrics, forthcoming
- Dassios, A. (1992), Asymptotic Approximations to Stochastic Variance Models, manuscrito, Dto. de Estadística, London School of Economics
- Demos, A. y E. Sentana (1991), Testing for GARCH Effects: a One-sided Approach, manuscrito, Financial Markets Group, London School of Economics
- Diebold, F.X. y M. Nerlove (1989), The Dynamics of Exchange Rate Volatility: A Multivariate Latent ARCH Model, Journal of Applied Econometrics, 4, 1-21
- Ding, Z., C.W.J. Granger and R. Engle (1993), A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model, Journal of Empirical Finance, Vol. 1, No. 1, pp. 83-106
- Dunsmuir, W. (1979), A Central Limit Theorem for Parameter Estimation in Stationary Vector Time Series and its Applications to Models for a Signal Observed with Noise, Annals of Statistics, 7, 490-506
- Engle, R.F. (1982), Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation, Econometrica, 50, 987-1008
- Engle, R.F. (1983), Estimates of the Variance of U.S. Inflation Based on the ARCH Model, Journal of Money, Credit and Banking, 15, 286-301
- Engle, R.F. (1987), Multivariate ARCH with Factor Structures - Cointegration in Variance, Discussion Paper no. 87-27, Universidad de California, San Diego
- Engle, R.F. y T. Bollerslev (1986), Modelling the Persistence of Conditional Variances, Econometrics Review, 5, 1-50

Engle, R.F. y Gonzalez-Rivera, G. (1991), Semiparametric ARCH Models, Journal of Business and Economic Statistics, 9, 345-360

Engle, R.F. y G.G.J. Lee (1993), A Permanent and Transitory Component Model of Stock Return Volatility, Discussion Paper 92-44R, Universidad de California, San Diego

Engle, R.F., V.K. Ng y M. Rothschild (1990), Asset Pricing with a Factor ARCH Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills, Journal of Econometrics, 45, 213-238

Engle, R.F., D.M. Lilien y R.P. Robins (1987), Estimating the Time Varying Risk Premia in the Term Structure: the ARCH-M Model, Econometrica, 55, 391-407

Fama, E.F. (1965), The Behavior of Stock Market Prices, Journal of Business, 38, 34-105

Gallant, A.R. y G. Tauchen (1989), Semi-Nonparametric Estimation of Conditionally Constrained Heterogeneous Processes: Asset Pricing Applications, Econometrica, 57, 1091-1120

Gourieroux, C. y A. Monfort (1992), Qualitative Threshold ARCH Models, Journal of Econometrics, 52, 159-199

Granger, C.W.J. y A.P. Andersen (1978), An Introduction to Bilinear Time Series Models, Vandenhoeck and Ruprecht, Grottingen

Granger, C.W.J. y Z. Ding (1993), Some Properties of Absolute Return: An Alternative Measure of Risk, Discussion Paper 93-38, Universidad de California, San Diego

Granger, C.W.J. y T. Terasvista (1992), Modelling Dynamic Nonlinear Relationships, Oxford University Press, Oxford

Harvey, A.C. (1989), Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter, Cambridge University Press, Cambridge

Harvey, A.C. y N.G. Shephard (1993.a), The Econometrics of Stochastic Volatility, LSE Financial Markets Group discussion paper no. 166

Harvey, A.C. y N.G. Shephard (1993.b), Estimation and Testing of Stochastic Variance Models, STICERD Discussion Paper, London School of Economics

Harvey, A.C., E. Ruiz y E. Sentana (1992), Unobserved Component Time Series Models with ARCH Disturbances, Journal of Econometrics, Vol. 52, No. 1/2, 130-157

Harvey, A.C., E. Ruiz y N.G. Shephard (1994), Multivariate Stochastic Variance Models, Review of Economic Studies, forthcoming

Higgins, M.L. y A.K. Bera (1989), A Joint Test for ARCH and Bilinearity in the Regression Model, Econometric Review, 7, 171-181

- Higgins, M.L. y A.K. Bera (1992), A Class of Nonlinear ARCH Models, International Economic Review, 33, 137-158
- Hong, P.Y. (1991), The Autocorrelation Structure for the GARCH-M Process, Economic Letters, 37, 129-132
- Jacquier, E., N.G. Polson y P.E. Rossi (1994), Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models, Journal of Business and Economic Statistics, forthcoming
- Kleibergen, F. y H.K. Van Dijk (1993), Non-Stationarity in GARCH Models: A Bayesian Analysis, Journal of Applied Econometrics, Vol. 8, 41-61
- Kraft, D.F. y R.F. Engle (1983), Autoregressive Conditional Heteroskedasticity in Multiple Time Series, manuscrito, Dto. de Economía, Universidad de California, San Diego
- Lee, J.H. y M.L. King (1991), A Locally Most Mean Powerful Based Score Test for ARCH and GARCH Regression Disturbances, Working Paper No. 9/91, Dto. de Economía, Universidad de Monash
- Lumsdaine, R.L. (1991), Asymptotic Properties of the Maximum Likelihood Estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) models, manuscrito, Dpto. de Economía, Universidad de Princeton
- Mandelbrot, B. (1963), The Variation of Certain Speculative prices, Journal of Business, 36, 394-419
- Maravall, A. (1983), An Application of Nonlinear Time Series Forecasting, Journal of Business and Economic Statistics, 1, 66-74
- Melino, A. y S.M. Turnbull (1990), Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility, Journal of Econometrics, 45, 239-265
- McLeod A.I. y W.K.Li (1983), Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-Residual Autocorrelations, Journal of Time Series Analysis, 4, 269-273
- Merton, R.C. (1980), On Estimating the Expected Return on the market, Journal of Financial Economics, 8, 323-361
- Nelson, D.B. (1988), The Time Series Behaviour of Stock Market Volatility and Returns, Tesis Doctoral, Massachusetts Institute of Technology
- Nelson, D.B. (1990), Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model, Econometric Theory, 6, 318-344
- Nelson, D.B. (1991), Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Approach, Econometrica, 59, 347-370

Nelson, D.B. y C.Q. Cao (1992), Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model, Journal of Business and Economic Studies, 10, 229-235

Nijman, T.E. and F.C. Palm (1992), Recent Developments in Modeling Volatility in Financial Data, unpublished manuscript, Center for Economic Research, Tilburg University

Novales, A. y M. Gracia-Díez (1993), Guía para la Estimación de Modelos ARCH, Estadística Española, Vol. 35, 132, 5-38

Pagan, A.R. and G.W. Schwert (1990), Alternative Models for Conditional Stock Volatility, Journal of Econometrics, 45, 267-290

Peña, J.I. y E. Ruiz (1994), Stock Market Regulations and International Financial Integration: the Case of Spain, manuscrito, Dto. de Economía de la Empresa, Universidad Carlos III de Madrid

Robinson, P.M. (1991), Testing for Strong Serial Correlation and Dynamic Conditional Heteroskedasticity in Multiple Regression, Journal of Econometrics, 47, 67-84

Ruiz, E. (1993), Stochastic Volatility versus Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, Working Paper 93-44, Universidad Carlos III de Madrid

Ruiz, E. (1994), Quasi-Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models, Journal of Econometrics, forthcoming

Schwert, G.W. (1989), Tests for Unit Roots: A Monte Carlo Investigation, Journal of Business and Economic Statistics, 7, 147-160

Shephard, N.G. (1993), Fitting Nonlinear Time-Series Models with Application to Stochastic Variance Models, Journal of Applied Econometrics, 8, 135-152

Taylor, S.J. (1986), Modelling Financial Time Series, John Wiley, Chichester, U.K.

Taylor, S.J. (1991), Modeling Stochastic Volatility, manuscrito, Dto. de Contabilidad y Finanzas, Universidad de Lancaster

Tsay, R.S. (1987), Conditional Heteroskedastic Time Series Models, Journal of the American Statistical Association, 82, 590-604

Weiss, A.A. (1984), ARMA Models with ARCH Errors, Journal of Time Series Analysis, 5, 129-143

Weiss, A.A. (1986), ARCH and Bilinear Time Series Models: Comparison and Combination, Journal of Business and Economic Statistics, 4, 59-70

WORKING PAPERS 1994

Economics Series

- 94-01 (01) Javier Estrada
"Insider trading: regulation or taxation?"

Statistics and Econometrics Series

- 94-02 (01) Luis R. Pericchi and Bruno Sansó
"A note on bounded influence in bayesian analysis"

DOCUMENTOS DE TRABAJO 1994

Serie de Estadística y Econometría

- 94-01 (01) Antoni Espasa
"Aproximaciones a la Econometría"
- 94-02 (02) Esther Ruiz
"Modelos para Series Temporales Heterocedásticas"

REPRINT 1994

Statistics and Econometrics Series

- Antoni Espasa
"Perspectives of the Spanish economy at the beginning of 1994"